Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1

Zeigen Sie unter Verwendung geodätischer Koordinaten (lokal ebenes System, d.h. es gelte $\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c} \equiv 0$ und $\nabla_m = \frac{\partial}{\partial x^m}$) die *Bianchi-Identität*:

$$\nabla_m R_{ijkl} + \nabla_l R_{ijmk} + \nabla_k R_{ijlm} \equiv 0 \tag{1}$$

Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis von Blatt 6, Aufgabe 2 a) und differenzieren Sie nach x^m.

Aufgabe 2

Beweisen Sie die *kontrahierte Bianchi-Identiät*:

$$\nabla_m R_{jl} - \nabla_l R_{jm} + \nabla_k R^k_{jlm} = 0 \tag{2}$$

Hinweis: Multiplizieren Sie (1) mit g^{ik}.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass mit der Definition des *Einstein-Tensor* G^{lk} als

$$G^{lk} := R^{lk} - \frac{1}{2} g^{lk} R \tag{3}$$

gilt:

$$\nabla_l G^{lk} = 0 \tag{4}$$

Hinweis: Multiplizieren Sie (2) mit g^{jl}. Verwenden Sie $\nabla_m R = g^l_m \nabla_l R$.