

Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1

Betrachtet sei *Staub*, bestehend aus N nicht wechselwirkenden Teilchen der Masse m im Volumen V mit Massendichte $\rho_0 = \frac{Nm}{V}$. Alle Teilchen sollen sich mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegen (etwa weil sie sich im Wirkungsbereich eines *Staubsaugers* befinden).

Zeigen Sie (nicht relativistische Rechnung): die pro Zeiteinheit Δt durch eine senkrecht zur Geschwindigkeit stehende Fläche mit Flächeninhalt A tretende Masse ΔM (*Stromdichte* oder *Flussdichte* \vec{j}) ist gegeben durch

$$\vec{j} = \rho_0 \vec{v} \quad (1)$$

Aufgabe 2

Der Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}$ für Staub ist definiert als

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu \quad (2)$$

mit der Vierergeschwindigkeit u^μ (siehe Aufgabenblatt 8) und der Dichte ρ_0 im Ruhesystem der Teilchen.

a) Zeigen Sie: für die Dichte ρ in einem mit \vec{v} bewegten Inertialsystem gilt:

$$\rho = \gamma^2 \rho_0 \quad (3)$$

b) Berechnen Sie die Komponenten des Tensors $T^{\mu\nu}$ im Ruhesystem der Staubteilchen.

c) Berechnen Sie die Komponenten des Tensors $T^{\mu\nu}$ in einem relativ zum Ruhesystem der Staubteilchen mit der Geschwindigkeit \vec{v} gleichförmig bewegten System.

d) Zeigen Sie: die Komponente T^{00} lässt sich interpretieren als *Energiedichte* des Staubs.

e) Zeigen Sie: die Komponente T^{01} lässt sich interpretieren als *Fluss* von p^0 in x-Richtung (p^μ : Viererimpuls, siehe Aufgabenblatt 8).

f) Zeigen Sie: aus der Forderung

$$\partial_\nu T^{0\nu} = 0 \quad (4)$$

folgt die *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0 \quad (5)$$