Aufgabenblatt 10

Aufgabe 1

Nach der Newtonschen Theorie ist der Betrag der Gravitationskraft F zweier Körper der Massen M und m im Abstand r gegeben durch

$$F = G\,\frac{Mm}{r^2} \tag{1}$$

a) Berechnen Sie mit Hilfe von (1) die *Fluchtgeschwindigkeit* v_s, welche ein Körper der Masse m mindestens haben muss, um von der Oberfläche eines Planeten mit Radius R und Masse M ins Unendliche zu entkommen.

b) Zeigen Sie: damit der Körper mit der maximalen Fluchtgeschwindigkeit $v_s = c$ ins Unendliche entkommen kann, darf der Radius des Planeten (*Schwarzschild-Radius*) nicht kleiner sein als

$$R_s = \frac{2GM}{c^2} \tag{2}$$

c) Berechnen Sie den Schwarzschild-Radius für Erde und Sonne.

Aufgabe 2

Das *Schwarzschild-Linienelement* ist gegeben durch

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \left(\frac{1}{1-\frac{2MG}{r}}\right)\mathrm{d}r^2 - r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2) \tag{3}$$

a) Geben Sie die Komponenten $g_{\mu\nu}$ und $g^{\mu\nu}$ der Schwarzschild-Metrik an.

b) Zeigen Sie: für den Fall des Vakuums ($T_{\mu\nu} = 0$) reduziert sich die allgemeine Feldgleichung

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu} \tag{4}$$

auf

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{5}$$

c) Zeigen Sie exemplarisch, dass die Schwarzschild-Metrik Gleichung (5) erfüllt, indem Sie $R_{\mu\nu} = 0$ für $\mu = \nu = t$ verifizieren.
(Hinweis: berechnen Sie die Christoffel-Symbole Γ^r_{tt}, Γ^t_{tr}, Γ^r_{rr}, $\Gamma^\theta_{r\theta}$, $\Gamma^\phi_{r\phi}$, $\Gamma^r_{\theta\theta}$, $\Gamma^\phi_{\theta\phi}$, $\Gamma^r_{\phi\phi}$, $\Gamma^\theta_{\phi\phi}$, alle anderen Symbole sind null).