

## Aufgabenblatt 11

### Aufgabe 1

Das Schwarzschild-Linienelement ist in SI Einheiten gegeben durch

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(\frac{1}{1 - \frac{2MG}{c^2 r}}\right) dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1)$$

- a) Folgern Sie die *Längenkontraktion im Gravitationsfeld*, indem Sie für einen Maßstab zum Zeitpunkt  $t$  am Ort  $(\theta, \phi)$

$$ds = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-\frac{1}{2}} dr \quad (2)$$

zeigen.

- b) Folgern Sie die *Zeitdilatation im Gravitationsfeld*, indem Sie für eine ruhende Uhr am Ort  $(r, \theta, \phi)$

$$d\tau = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{\frac{1}{2}} dt \quad (3)$$

zeigen.

### Aufgabe 2

Wird beim Schwarzschild-Linienelement die Raumkrümmung vernachlässigt, so erhält man (für  $c = 1$ ) die Näherung

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right) dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (4)$$

- a) Berechnen Sie die nichtverschwindenden Christoffel-Symbole  $\Gamma_{tx}^t, \Gamma_{ty}^t, \Gamma_{tz}^t, \Gamma_{tt}^x, \Gamma_{tt}^y$  und  $\Gamma_{tt}^z$ .
- b) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für ein Teilchen auf, indem Sie die  $(t, x, y, z)$ -Komponenten der Geodätengleichung

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (5)$$

explizit berechnen.

- c) Folgern Sie aus (5) in *nichtrelativistischer Näherung* ( $v \ll 1, d\tau \approx dt$ ) das *Newtonsche Gravitationsgesetz*

$$F_g = G \frac{Mm}{r^2} \quad (6)$$