

Aufgabenblatt 12

Aufgabe 1

Visualisieren Sie die Schwarzschild-Metrik für $t = \text{const.}$ und $\theta = \frac{\pi}{2}$ als 2-dim. Fläche, die in einem 3-dim. euklidischen Raum eingebettet ist.

a) Zeigen Sie, dass das Linienelement dieser Fläche gegeben ist durch

$$ds^2 = \left(\frac{1}{1 - \frac{2MG}{r}} \right) dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (1)$$

b) Zeigen Sie, dass das Linienelement in Zylinderkoordinaten ($x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, $z = z$) gegeben ist durch

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2 \quad (2)$$

c) Zeigen Sie, dass das Linienelement der Fläche mit den Parametern $r = r$, $\phi = \phi$ und $z = z(r)$ gegeben ist als

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \right] dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (3)$$

d) Setzen Sie (1) und (3) gleich und folgern Sie für den Parameter z :

$$z(R) = \int_{2MG}^R \frac{dr}{\sqrt{\frac{r}{2MG} - 1}} \quad (4)$$

e) Zeigen Sie

$$z(r) = 4MG \sqrt{\frac{r}{2MG} - 1} \quad (5)$$

indem Sie das Integral (4) lösen.

Aufgabe 2

Verwenden Sie ein Grafikprogramm Ihrer Wahl, um die Schwarzschild-Fläche darzustellen. (Beispiel siehe nächste Seite)

