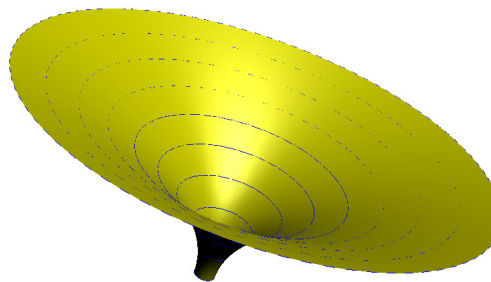


# Tensoranalysis Allgemeine Relativitätstheorie

Ein Skriptum



Claus Poltermann

8. April 2017

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Tensoren</b>	<b>5</b>
1.1	Skalare . . . . .	5
1.2	Vektoren . . . . .	6
1.3	Koordinatensysteme . . . . .	6
1.4	Tensoren 2. Stufe . . . . .	8
1.5	Transformationsverhalten . . . . .	9
1.6	Flache und gekrümmte Räume . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Tensoralgebra</b>	<b>13</b>
2.1	Totales Differential . . . . .	13
2.2	Summationskonvention . . . . .	14
2.3	Koordinatentransformation . . . . .	14
2.4	Kontravariante Tensoren 1. Stufe . . . . .	15
2.5	Kontravariante Tensoren 2. Stufe . . . . .	16
2.6	Kovariante Tensoren 1. Stufe . . . . .	17
2.7	Kovariante Tensoren 2. Stufe . . . . .	19
2.8	Kovarianter metrischer Tensor . . . . .	19
2.9	Gemischte Tensoren, Verjüngung . . . . .	23
2.10	Überschiebung . . . . .	24
2.11	Kontravarianter metrischer Tensor . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Tensoranalysis</b>	<b>26</b>
3.1	Kovariante Ableitung . . . . .	27
3.2	Christoffel-Symbole . . . . .	29
3.3	Geodäten . . . . .	30
3.4	Paralleltransport und Krümmung im 2-dim. Raum . . . . .	33
3.5	Der Krümmungstensor . . . . .	35
3.6	Ricci-Tensor und Einstein-Tensor . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Energie-Impuls-Tensor</b>	<b>40</b>
4.1	Strom als Vierervektor . . . . .	40
4.2	Energie und Impuls . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Gravitation</b>	<b>43</b>
5.1	Newtonsche Gravitation . . . . .	43
5.2	Newtonsche Feldgleichung . . . . .	44
5.3	Bewegung im Gravitationsfeld . . . . .	46

---

5.4	Newtonscher Grenzfall . . . . .	46
5.5	Die allgemeinen Feldgleichungen . . . . .	48
5.6	Die kosmologische Konstante . . . . .	49

# Vorwort

Die Gravitation ist eine seltsame Kraft, denn sie scheint mit den geometrischen Eigenschaften von Raum und Zeit verknüpft zu sein, mit der Krümmung des Raumes und mit der Geschwindigkeit, mit der die Zeit vergeht. Gravitation *ist* die Krümmung der Raum-Zeit, und dieser Zusammenhang wird durch die Allgemeine Relativitätstheorie von ALBERT EINSTEIN beschrieben.

Mit diesem Skript soll ein Zugang zur Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) skizziert werden, der den Leser auf dem kürzesten Weg – sozusagen einer Geodäte im Raum der Tensoren – von den Grundlagen der Analysis und Linearen Algebra zu den Einsteinschen Feldgleichungen führt. Große Teile des Skripts basieren auf einer Vorlesung von LEONARD SUSSKIND (Stanford University).

Vorausgesetzt werden beim Leser Grundkenntnisse der mehrdimensionalen Analysis und Linearen Algebra, sowie Grundlagen der Speziellen Relativitätstheorie. Vertrautheit mit Tensoren wird nicht erwartet, dies ist vielmehr eines der Ziele dieses Skriptums.

Ein PDF-Dokument dieses Skripts steht unter <http://astronomie-erding.de> zur Verfügung.

Für Hinweise auf Fehler oder Unklarheiten bin ich jederzeit dankbar. Meine e-Mail Adresse ist: [claus.poltermann@astronomie-erding.de](mailto:claus.poltermann@astronomie-erding.de)

# 1 Tensoren

Wir kommen gleich zur Sache und erörtern eine Frage, die beim Studium der Allgemeinen Relativitätstheorie von zentraler Bedeutung ist: Was ist ein Tensor ? In praktisch allen Lehrbüchern werden Tensoren über ihr Verhalten bei Transformationen des Koordinatensystems definiert, dem Einsteiger hilft das aber erst mal nicht weiter. Wir wollen uns dieser Definition langsam nähern.

## 1.1 Skalare

Die Physik ist eine quantitative Naturwissenschaft, es werden also konkrete Zahlenwerte für physikalische Größen gemessen und errechnet. Dazu gehören Temperaturen, Geschwindigkeiten, elektrische Feldstärken etc. Manche dieser Größen lassen sich durch eine einzige reelle *Zahl* und eine entsprechende *Einheit* ausdrücken, z.B. die Entfernung zweier Punkte im Raum durch die Angabe 3 km. Die Temperatur an einem Punkt im Raum kann man durch  $20^\circ\text{C}$  angeben. Diese Größen nennt man *Skalare*.

Die Temperatur, bei der Wasser gefriert, läßt sich angeben als  $0^\circ\text{C}$  in der Einheit Celsius, oder als  $32^\circ\text{F}$  in der Einheit Fahrenheit. Beide Angaben bezeichnen physikalisch dieselbe Temperatur (Wasser gefriert), obwohl die Wahl der Einheit regional verschieden und willkürlich ist. Wird also die Einheit geändert, so muss auch der Zahlenwert der Temperatur umgerechnet werden, um dieselbe physikalische Meßgröße auszudrücken.

Um diesen Zusammenhang zu vertiefen, noch ein triviales Beispiel: die Länge einer Strecke läßt sich sowohl in m als auch in km ausdrücken. Für eine Länge von 100 m gilt:  $100\text{ m} = 0,1\text{ km}$ . Wird die zu Grunde liegende Einheit um den Faktor 1000 multipliziert, muss der entsprechende Zahlenwert um den Faktor 1000 dividiert werden, damit die Länge gleich (*invariant*) bleibt. Betrachtet man die Einheit als einfaches Beispiel eines eindimensionalen Koordinatensystems, und den Wechsel von Meter auf Kilometer als einfache Koordinatentransformation, so stellt man also fest, dass sich die Zahlenwerte der Längen genau umgekehrt transformieren wie die Basiseinheiten. Man nennt dieses Verhalten bei einer Transformation *kontravariant*.

Es gibt auch Größen, die sich nicht umgekehrt, sondern genau so wie die Basiseinheit transformieren, auch hierzu ein sehr einfaches Beispiel. In der Meteorologie gilt die Faustregel, dass die Temperatur in der Atmosphäre pro 100 Höhenmeter um  $1^\circ\text{C}$  abnimmt. Pro km Entfernung vom Erdboden gilt also eine Temperaturänderung von  $10^\circ\text{C}$ . Wird die Basiseinheit (100 m) mit 10 multipliziert, die neue Einheit also in km angegeben, so muss der Temperaturgradient ebenfalls mit 10 multipliziert werden. Gradienten transformieren sich *kovariant*, anders als Längen.

## 1.2 Vektoren

Es gibt auch Größen, die nicht nur durch ihren Betrag, sondern auch durch eine Richtung im Raum gekennzeichnet sind. Diese Größen nennt man *Vektoren*. Ein Vektor kann als Pfeil im Raum dargestellt werden. Die Länge des Pfeils entspricht dem Betrag der darzustellenden Größe, und die Richtung des Pfeils veranschaulicht die Orientierung im Raum. Ein zum Erdmittelpunkt gerichteter Pfeil kann die Gravitationskraft darstellen. Ein Vektor kann auch eine Geschwindigkeit repräsentieren. Aber auch eine *Fläche* kann durch einen Vektor dargestellt werden: als Betrag des Vektors wird die Maßzahl des Flächeninhalts  $A$  verwendet und für die Richtung wird eine Richtung *senkrecht* auf dem Flächenelement vereinbart (Normalenvektor  $\vec{n}$ ), siehe Abbildung 1.1.

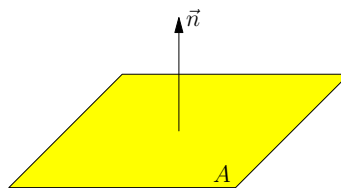


Abbildung 1.1: Flächenelement mit Normalenvektor

Um mit Vektoren rechnen zu können bedarf es der Definition eines *Koordinatensystems*. Koordinatensysteme sind Vermittler zwischen Physik und Mathematik. Sie sind notwendig, um eine physikalische Größe mit Hilfe von Zahlen darzustellen, um damit rechnen zu können. Ein Koordinatensystem erlaubt es, einen Vektor (im dreidimensionalen Raum) durch drei Zahlen, die *Koordinaten*, zu beschreiben.

## 1.3 Koordinatensysteme

Ein häufig verwendetes Koordinatensystem ist das *kartesische* Koordinatensystem, es besteht (in zwei Dimensionen) aus zwei aufeinander senkrecht stehenden geradlinigen Achsen ( $x$ -Achse und  $y$ -Achse). Für die Darstellung einer 3. Dimension kann man sich eine weitere Achse vorstellen, die aus der Zeichenebene herausragt und senkrecht auf der  $(x, y)$ -Ebene steht. Im Folgenden beschränken wir uns aber auf zwei Dimensionen.

Die Vektoren  $\vec{e}_x$  und  $\vec{e}_y$  zeigen in Richtung der  $x$ -Achse und  $y$ -Achse und heißen *Basisvektoren* oder auch *Einheitsvektoren*, da sie per Definition die Länge 1 haben. Zahlenangaben auf den Achsen beziehen sich immer auf ein Vielfaches der durch die Einheitsvektoren definierten Längeneinheit.

Mit Hilfe des Koordinatensystems und der Basisvektoren können wir nun die Komponenten eines Vektors angeben. Betrachten wir den Vektor  $\overrightarrow{OP}$  vom Ursprung des Koordinatensystems zum Punkt  $P$ . Um die  $x$ -Koordinate dieses Vektors zu finden, zieht man eine zur  $y$ -Achse parallele Gerade durch den Punkt  $P$ . Diese Gerade schneidet die  $x$ -Achse bei  $x_P$ . Analog verfährt man für die  $y$ -Koordinate: man zieht eine zur  $x$ -Achse parallele Gerade durch den Punkt  $P$ , diese Gerade schneidet die  $y$ -Achse im Punkt  $y_P$ . Durch Angabe der Koordinaten  $(x_P, y_P)$  ist der Punkt  $P$  eindeutig beschrieben. Die

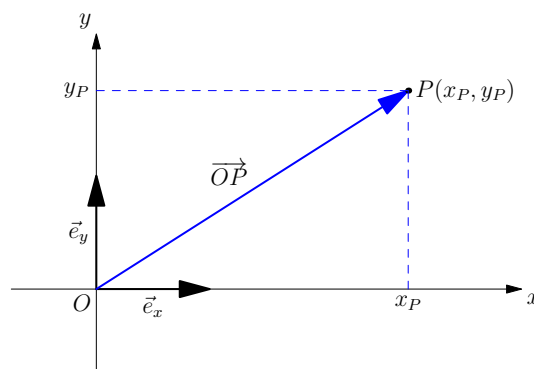


Abbildung 1.2: Kartesisches Koordinatensystem mit Einheitsvektoren

Vielfachen der Einheitsvektoren entlang der Achsen vom Ursprung bis zu den Punkten  $x_P$  bzw.  $y_P$ ,  $x_P \vec{e}_x$  und  $y_P \vec{e}_y$  nennt man die *Komponenten* des Vektors  $\vec{OP}$ . Es gilt:

$$\vec{OP} = x_P \vec{e}_x + y_P \vec{e}_y \quad (1.1)$$

Setzt man die Basisvektoren als bekannt voraus, kann man sie auch weglassen und gelangt so zu der Darstellung als Spaltenvektor:

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Man beachte, dass in der Darstellung als Spaltenvektor die Basisvektoren nicht explizit vorkommen, aber dennoch als Grundlage für die Berechnung der Komponenten des Vektors unerlässlich sind, denn die Koordinaten  $x_P$  und  $y_P$  sind von der gewählten Basis abhängig.

Neben dem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem werden noch *schiefwinkelige* Koordinatensysteme verwendet, die Achsen sind Geraden, schließen aber keinen rechten Winkel ein. Wichtig sind auch *krümmmlinige* Koordinatensysteme wie Polarkoordinaten in zwei Dimensionen (siehe Abb. 2.3) und Kugelkoordinaten (Abb. 1.3).

In einem gegebenen Koordinatensystem und bei bekannten Basisvektoren  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  und  $\vec{e}_z$  kann man allgemein jeden Vektor  $\vec{A}$  durch seine  $x$ ,  $y$  und  $z$ -Koordinate als Spaltenvektor darstellen:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Wir benötigen zur Darstellung von Vektoren *einen* Index, denn jeder Koordinate ist genau *ein* Basisvektor zugeordnet, für die  $x$ -Richtung der Basisvektor  $\vec{e}_x$  und für die  $y$ -Richtung der Basisvektor  $\vec{e}_y$  etc. Diese für die Vektorrechnung selbstverständliche Tatsache wird hier deshalb betont, weil sie für das Verständnis von Tensoren entscheidend

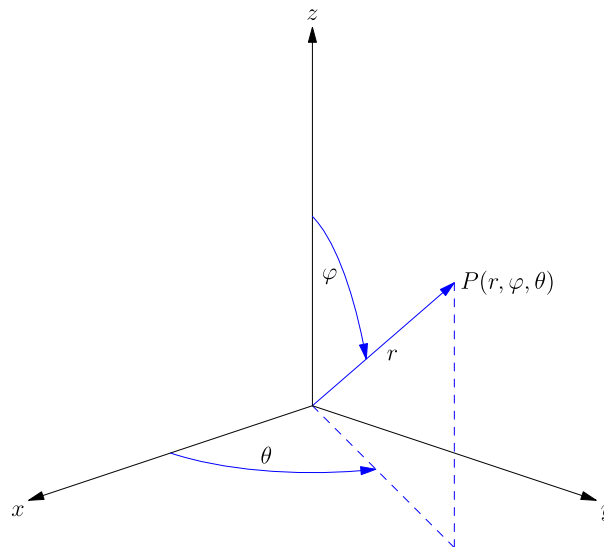


Abbildung 1.3: sphärische Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten)

ist. Denn ein Vektor ist bereits ein *Tensor 1. Stufe*. Die Anzahl der Indices entspricht der *Stufe* des Tensors. Ein Index bedeutet ein Basisvektor pro Komponente.

In einer symbolischen Notation, bei der jeder Koordinate ein Basisvektor zugeordnet ist, könnte man den Vektor  $\vec{A}$  wie folgt notieren:

$$\vec{A} \sim \begin{pmatrix} \rightarrow \\ \uparrow \\ \circ \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

wobei  $\rightarrow$  für den Basisvektor in  $x$ -Richtung steht,  $\uparrow$  für den Basisvektor in  $y$ -Richtung und  $\circ$  für den Basisvektor in  $z$ -Richtung, der aus der Zeichenebene herauszeigt.

## 1.4 Tensoren 2. Stufe

Tensoren 2. Stufe sind doppelt indizierte Größen, jede Koordinate ist mit zwei Basisvektoren verknüpft. Man kann sich einen solchen Tensor vorstellen als eine Größe, die im Gegensatz zum Vektor nicht nur über *eine*, sondern über *zwei* Richtungen verfügt.

Im dreidimensionalen Raum kann ein Tensor 2. Stufe  $\mathbf{A}$  in Matrixschreibweise wie folgt dargestellt werden:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

oder in einer symbolischen Notation analog zum Ausdruck (1.4):



$$\mathbf{A} \sim \begin{pmatrix} \rightarrow\rightarrow & \rightarrow\uparrow & \rightarrow\circ \\ \uparrow\rightarrow & \uparrow\uparrow & \uparrow\circ \\ \circ\rightarrow & \circ\uparrow & \circ\circ \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Wir haben jetzt neun Komponenten und neun Kombinationen von je zwei Basisvektoren. Das klassische Beispiel für einen Tensor 2. Stufe ist der *Spannungstensor*, mit dem Kräfte in einem Festkörper beschrieben werden können und der dem Tensor seinen Namen gegeben hat (lat. *tendere*: spannen).

Innerhalb des Festkörpers kann man sich Oberflächen vorstellen, die durch einen Vektor repräsentiert werden. Ein Vektor, der senkrecht auf einer Fläche steht, heißt *Normalenvektor* (siehe Abb. 1.1). Es gibt also Normalenvektoren in  $x$ ,  $y$  und  $z$ -Richtung. Auf jede dieser Flächen kann eine Kraft wirken, die ihrerseits wiederum Komponenten in alle drei Raumrichtungen hat. Für die Kombination aus Oberfläche und Kraft gibt es daher neun Möglichkeiten. Die Komponente  $A_{xx}$  beschreibt somit die Kraft in  $x$ -Richtung, die auf einer Oberfläche angreift, deren Normalenvektor in  $x$ -Richtung zeigt. Die Komponente  $A_{yx}$  könnte eine Kraft in  $y$ -Richtung beschreiben, die auf einer Oberfläche angreift, deren Normalenvektor in  $x$ -Richtung orientiert ist etc.

Tensoren 3. Stufe besitzen im dreidimensionalen Raum 27 Komponenten, jede enthält eine Kombination aus drei Basisvektoren und hat drei Indices. Sie können nicht mehr in Matrixschreibweise notiert werden. Vielmehr bestehen sie aus einer Art Quader, gewissermaßen eine dreidimensionale Erweiterung einer Matrix. Neben Zeilen und Spalten kommt noch eine dritte Dimension hinzu.

Tensoren 2. und höherer Stufe lassen sich nicht mehr anschaulich darstellen, insbesondere in Räumen mit mehr als drei Dimensionen. Die Mathematik erlaubt es dennoch, mit diesen Größen umzugehen.

## 1.5 Transformationsverhalten

Allen Koordinatensystemen ist gemeinsam, dass sie willkürlich gewählt werden. Diese Willkürlichkeit betrifft die Wahl des Nullpunkts, die Form der Achsen (geradlinig oder gekrümmt) sowie die Skalierung der Achsen. Generell sind alle Koordinatensysteme gleichberechtigt, die Wahl eines bestimmten Systems wird aus Gründen der Einfachheit oder aus rechentechnischen Gründen getroffen.

In verschiedenen Koordinatensystemen hat nun ein und derselbe physikalische Vektor verschiedene Koordinaten, da seine Koordinaten von der Wahl des Koordinatensystems abhängen. Der Vektor selbst hängt aber nicht vom Koordinatensystem ab, da dieses nur zur Beschreibung des Vektors dient, selbst aber keine physikalische Realität hat. Somit stellt sich das Problem, dass man einerseits auf ein Koordinatensystem angewiesen ist, um physikalischen Größen Zahlenwerte zuzuordnen, andererseits sind diese Zahlenwerte ebenso willkürlich wie die Wahl des Koordinatensystems, haben also keine absolute Bedeutung.

Der Ausweg aus diesem Dilemma besteht darin, in physikalischen Gleichungen (d.h. in Gleichungen, die zwei oder mehr physikalische Größen miteinander in Beziehung set-

zen) nur Größen zuzulassen, die in jedem Koordinatensystem gleich sind. Physikalische Gesetze müssen unabhängig von der Wahl eines Koordinatensystems gültig sein. Und hier kommt die Mächtigkeit der Tensoren ins Spiel: Tensoren sind invariant unter einer Koordinatentransformation.

Als Beispiel betrachten wir eine einfache Koordinatentransformation in Form einer Rotation. Wir untersuchen, wie sich ein Vektor unter einer Koordinatentransformation verhält.

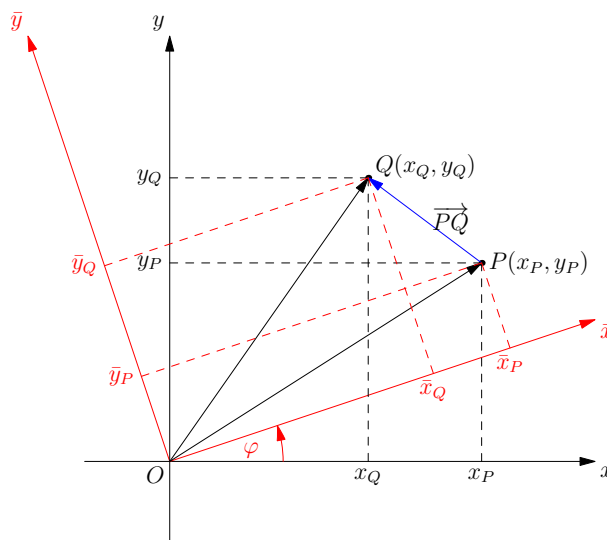


Abbildung 1.4: Rotation eines kartesischen Koordinatensystems

Im  $(x, y)$ -System hat der Punkt  $P$  die Koordinaten  $(x_P, y_P)$  und der Punkt  $Q$  hat die Koordinaten  $(x_Q, y_Q)$ . Das neue, gedrehte  $(\bar{x}, \bar{y})$ -System geht aus dem alten System durch eine Drehung der Basisvektoren um einen Winkel  $\varphi$  gegen den Uhrzeigersinn hervor (Abbildung 1.4). In diesem neuen System hat derselbe Punkt  $P$  die (anderen) Koordinaten  $(\bar{x}_P, \bar{y}_P)$  und der Punkt  $Q$  hat die Koordinaten  $(\bar{x}_Q, \bar{y}_Q)$ .

Wir betrachten den Vektor  $\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P}$  mit den Koordinaten  $(x_Q - x_P, y_Q - y_P)$ . Da sich dieser Vektor bei Transformation des Koordinatensystems nicht ändert, muss gelten:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_Q - \bar{x}_P \\ \bar{y}_Q - \bar{y}_P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_{\bar{x}} \\ \vec{e}_{\bar{y}} \end{pmatrix} = \overrightarrow{PQ} \quad (1.7)$$

Wird das Koordinatensystem geändert, geht man also von einem willkürlichen Koordinatensystem zu einem anderen ebenso willkürlichen Koordinatensystem über, so werden alle Basisvektoren des alten Systems mittels einer Rechenvorschrift in Basisvektoren des

<sup>1</sup>Der Ortsvektor  $\overrightarrow{OP}$  ist *nicht* unabhängig vom Koordinatensystem. Würde man neben der Rotation auch noch eine Translation zulassen, würde sich herausstellen, dass sich der Ortsvektor nicht wie ein Tensor 1. Stufe transformiert. Ortsvektoren sind in der Tat keine Tensoren 1. Stufe und hängen von der Wahl des Koordinatensystems ab.

neuen Systems abgebildet. Größen, die sich wie diese Basisvektoren transformieren, nennt man *kovariant*.

Die Koordinaten des Tensors transformieren sich mittels einer anderen Rechenvorschrift genau so, dass sich im neuen Koordinatensystem wieder genau derselbe Tensor ergibt. Sie transformieren sich gewissermaßen genau entgegengesetzt zu den Basisvektoren (*kontravariant*). Die Koordinaten eines Tensors ändern sich bei Koordinatentransformation, ebenso die Basisvektoren. Aber durch ihr besonderes Transformationsverhalten bleibt die *Kombination* aus Koordinaten und Basisvektoren invariant.

Dies ist der Grund, warum Tensoren in der Relativitätstheorie eine so wichtige Rolle spielen. Kein Bezugssystem (Koordinatensystem) ist vor einem anderen ausgezeichnet, in verschiedenen Bezugssystemen ergeben sich für die Koordinaten einer Größe verschiedene Werte, aber Tensoren bleiben beim Wechsel des Bezugssystems invariant. Alle Größen, die keinen willkürlichen Charakter haben sollen (wie er etwa Bezugssystemen anhaftet), sondern echte physikalische Wirklichkeit repräsentieren sollen, müssen daher Tensoreigenschaften haben. Hat man eine Gleichung aufgestellt, die eine bestimmte Beziehung zwischen zwei Tensoren ausdrückt, und in einem Koordinatensystem gültig ist, so ist garantiert, dass diese Beziehung auch in allen anderen Koordinatensystemen gültig ist.

Tensoren sind Größen, die durch ihr *Transformationsverhalten* definiert sind. Wir werden im nächsten Kapitel ausführlich auf diese Definition eingehen.

Skalare transformieren sich besonders einfach, nämlich gar nicht. Sie haben in allen Koordinatensystemen den gleichen Wert, weil sie gänzlich unabhängig von einem Koordinatensystem sind. Eine Temperatur an einem bestimmten Punkt im Raum hat (bei gleicher Wahl der Einheit) immer denselben Wert, in welchem Koordinatensystem der Punkt auch immer beschrieben wird. Skalare werden daher als *Tensoren 0. Stufe* bezeichnet.

## 1.6 Fläche und gekrümmte Räume

Im nächsten Kapitel werden wir Tensoren in beliebigen Koordinatensystemen betrachten. Für die Behandlung *gekrümmter Räume* ist es notwendig, über das praktische und einfache kartesische Koordinatensystem hinauszugehen und allgemeine Koordinatensysteme zu betrachten.

Den *flachen* oder *euklidischen Raum* haben wir bisher nicht definiert, seine Geometrie ist aber anschaulich klar. Die Oberfläche eines (flachen) Tisches ist ein Beispiel für einen flachen Raum in zwei Dimensionen, ebenso der uns umgebende dreidimensionale Raum. In einem flachen Raum ist der kürzeste Abstand zwischen zwei Punkten stets eine *Gerade*, die Summe der Winkel in einem Dreieck beträgt stets  $180^\circ$ , es gilt der Satz des Pythagoras etc.

Die (zweidimensionale) Oberfläche einer Kugel ist kein flacher Raum, die o.g. Gesetze gelten hier nicht.

Flache Räume lassen sich durch affine Koordinatensysteme beschreiben, d.h. Koordinatensysteme, deren Achsen Geraden sind, wie beim bekannten kartesischen Koordinatensystem. Flache Räume lassen sich aber auch durch *gekrümmte* Koordinatensysteme

beschreiben, d.h. Koordinatensysteme, deren Achsen gekrümmt sind. Ein Polarkoordinatensystem, in dem ein Punkt durch die Koordinaten  $(r, \varphi)$  angegeben wird, ist ein Beispiel eines gekrümmten Koordinatensystems: die Koordinatenlinien mit  $r = \text{const.}$  sind Kreise um den Ursprung.

Andererseits ist es nicht möglich, einen gekrümmten Raum durch affine Koordinatensysteme zu beschreiben. Auf der Oberfläche einer Kugel gibt es keine Geraden im euklidischen Sinn. Es gibt keine Koordinatentransformation, welche die gekrümmte Oberfläche einer Kugel verzerrungsfrei (d.h. ohne Änderung der *Metrik*, der Abstände zwischen zwei Punkten) in einen flachen Raum abbilden würde.

## 2 Tensoralgebra

Zum Verständnis dieses Kapitels werden ein wenig Lineare Algebra und ein paar Grundlagen aus der Analysis mit mehreren Veränderlichen benötigt. Für den Anfang genügt sogar der Begriff des totalen Differentials und der partiellen Ableitung.

### 2.1 Totales Differential

Gegeben sei ein  $d$ -dimensionaler Raum und über diesen Raum sei ein Koordinatensystem gelegt (Bild 2.1).

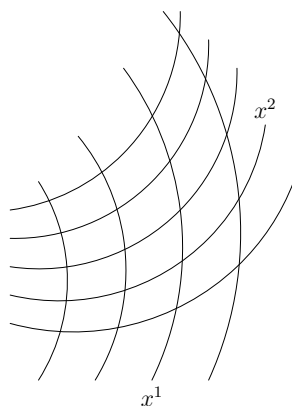


Abbildung 2.1: krummliniges Koordinatensystems (2-dim.)

Anstelle der Bezeichner  $x$ ,  $y$  und  $z$  für die Koordinatenachsen verwenden wir im Folgenden  $x^1, x^2, \dots, x^d$ . Durch die Verwendung von Indices können wir leicht mit beliebigen Dimensionen rechnen und sind nicht mehr auf zwei oder drei Dimensionen eingeschränkt. Der Index wird hochgestellt und bezeichnet keine Potenz! Der Grund für diese Bezeichnungweise wird erst später klar werden. Einstweilen wollen wir diese Bezeichnung einfach als willkürliche Definition hinnehmen.

Einen Punkt im Raum kann man in diesem Koordinatensystem mit  $d$  reellen Zahlen  $(x^1, x^2, \dots, x^d)$  angeben.

Weiterhin sei eine reellwertige Funktion  $\varphi(x) = \varphi(x^1, x^2, \dots, x^d)$  gegeben, die jedem Punkt des Raums einen Skalar zuordnet.  $x$  steht hier für die Gesamtheit der Koordinaten  $(x^1, x^2, \dots, x^d)$ , Die Funktion  $\varphi(x)$  definiert somit ein skalares Feld.

Wir betrachten die Änderung im Wert von  $\varphi(x)$ , wenn man vom Punkt  $x$  zum einem anderen Punkt  $x + dx$  übergeht, der vom Punkt  $x$  um den infinitesimal kleinen Wert  $dx$  entfernt ist.  $dx$  steht hier für die Gesamtheit der infinitesimalen Entfernungen  $(dx^1, dx^2,$

$\dots, dx^d$ ). Diese kleine Änderung des Werts von  $\varphi$  bezeichnen wir mit  $d\varphi$  und sie hängt ab von den partiellen Ableitungen von  $\varphi(x)$  nach den Koordinaten  $x$ . Wir nennen  $d\varphi$  das *totale Differential* von  $\varphi$  und es berechnet sich zu:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}dx^2 + \dots + \frac{\partial\varphi}{\partial x^d}dx^d \quad (2.1)$$

Die Änderung von  $\varphi$  entlang des Weges  $dx$  ergibt sich als Änderung von  $\varphi$  entlang eines Weges, bei dem sich nur  $x^1$  ändert (und alle anderen Variablen konstant bleiben) multipliziert mit der Änderung  $dx^1$ , plus der Änderung von  $\varphi$  entlang eines Weges, bei dem sich nur  $x^2$  ändert multipliziert mit der Änderung  $dx^2$  etc, und über alle diese Beiträge wird summiert.

Mit Hilfe des Summenzeichens können wir kürzer schreiben:

$$d\varphi = \sum_{n=1}^d \frac{\partial\varphi}{\partial x^n}dx^n \quad (2.2)$$

## 2.2 Summationskonvention

Im Ausdruck 2.2 kommt der Index  $n$  genau zwei mal vor, einmal als oberer Index in  $dx^n$  und einmal als unterer Index in  $\partial x^n$  ( $n$  befindet sich hier unterhalb des Bruchstrichs und wird daher als unterer Index bezeichnet). Diese Form der Summation kommt sehr häufig vor, und es ist auf Dauer lästig, das Summenzeichen mitzuführen, so dass ALBERT EINSTEIN eine *Summationskonvention* eingeführt hat:

**Einstein'sche Summationskonvention:** *Kommt in einem Ausdruck ein Index doppelt vor, einmal als oberer und einmal als unterer Index, so wird über diesen Index summiert, ohne dass dies durch ein Summenzeichen ausgedrückt wird.*

Mit der Einstein'schen Summationskonvention können wir nun noch einfacher schreiben:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^n}dx^n \quad (2.3)$$

Der Index  $n$  wird als *Summationsindex* oder *gebundener Index* bezeichnet. Er durchläuft der Reihe nach alle möglichen Werte von 1 bis  $d$ . Nach Abschluss der Summation ist der Index nicht mehr in dem Ausdruck enthalten. Die Wahl des Bezeichners für gebundene Indices spielt daher keine Rolle:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^n}dx^n = \frac{\partial\varphi}{\partial x^r}dx^r \quad (2.4)$$

## 2.3 Koordinatentransformation

Wir betrachten ein Gebiet eines Raumes, das von zwei verschiedenen Koordinatensystemen  $x$  und  $\bar{x}$  überdeckt sei. Ein Punkt P hat dann im  $x$ -Koordinatensystem die Koordinaten  $(x^1, x^2, \dots, x^d)$  und im  $\bar{x}$ -Koordinatensystem die Koordinaten  $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^d)$ .

Die Umrechnung von einem System in das andere bezeichnet man als *Koordinatentransformation*:

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, \dots, x^d) \quad (2.5)$$

$$x^i = x^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^d) \quad (2.6)$$

Die Funktionen  $x^i(\bar{x})$  und  $\bar{x}^i(x)$  sind Rechenregeln, die angeben, wie man die Koordinaten eines Punktes P in dem einen Koordinatensystem erhält, wenn sie in dem anderen Koordinatensystem gegeben sind. Die Funktionen sollen stetig sein und so oft differenzierbar, wie wir es benötigen.

Wir betrachten nun die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial \varphi}{\partial x^m}$  in einem gegebenen Punkt P. Wenn wir alle diese partiellen Ableitungen kennen, also wissen, wie sich  $\varphi$  im  $x$ -Koordinatensystem ändert, was können wir dann über die Änderungen von  $\varphi$  im  $\bar{x}$ -Koordinatensystem sagen, also über die Größen  $\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}^n}$ ?

Wenn wir berücksichtigen, dass  $\varphi$  eine Funktion von  $x$  ist, und  $x$  wiederum eine Funktion von  $\bar{x}$ , d.h. es gilt  $\varphi = \varphi(x) = \varphi(x(\bar{x}))$  müssen wir die Kettenregel für partielle Ableitungen anwenden:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}^n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^n} \quad (2.7)$$

$m$  ist ein gebundener Index, über den summiert wird.  $n$  dagegen ist ein *freier* Index, der die Werte von 1 bis  $d$  annehmen kann.

Als Beispiel setzen wir  $n = 1$  und schreiben die Gleichung vollständig aus:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}^1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x^d} \frac{\partial x^d}{\partial \bar{x}^1} \quad (2.8)$$

Hier sieht man, wie es mit Hilfe der Einstein'schen Summationskonvention möglich ist, komplexen Ausdrücken ein kompaktes Format zu geben.

## 2.4 Kontravariante Tensoren 1. Stufe

Wir beginnen mit der Untersuchung des Transformationsverhaltens eines Tensors 1. Stufe, also eines Vektors. Wie transformieren sich die Komponenten eines Vektors, wenn man von einem Koordinatensystem auf ein anderes übergeht?

Wir betrachten einen einfachen Vektor  $d\vec{x}$ , eine infinitesimale Verschiebung im Raum. Der Vektor  $d\vec{x}$  besitzt im  $n$ -dimensionalen Raum die Koordinaten  $(dx^1, dx^2, \dots, dx^n)$ . Die Komponenten von  $d\vec{x}$  sind infinitesimale Verschiebungen entlang der Koordinatenachsen des  $x$ -Koordinatensystems.

Derselbe physikalische Vektor  $d\vec{x}$  hat auch Komponenten im  $\bar{x}$ -Koordinatensystem. Wir wollen seine Koordinaten mit  $(d\bar{x}^1, d\bar{x}^2, \dots, d\bar{x}^n)$  bezeichnen. Wie können wir diese Koordinaten berechnen? Beide Koordinatensysteme sind durch die Beziehungen 2.5 und 2.6 verbunden, die Koordinaten des einen Systems sind Funktionen des jeweils anderen Systems. Wir betrachten zunächst die Koordinate  $d\bar{x}^1$  und fragen: wie ändert sich  $d\bar{x}^1$ ,

wenn man vom Punkt  $\vec{x}$  zum Punkt  $\vec{x} + d\vec{x}$  übergeht? Wir gehen aus von Gleichung 2.3 und ersetzen  $\varphi$  durch  $\bar{x}^1$  und erhalten:

$$d\bar{x}^1 = \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^n} dx^n \quad (2.9)$$

Für  $d\bar{x}^2$  erhält man analog:

$$d\bar{x}^2 = \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^n} dx^n \quad (2.10)$$

Allgemein gilt für  $d\bar{x}^i$  das Transformationsgesetz

$$d\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^n} dx^n \quad (2.11)$$

Wir können nun einen *kontravarianten Tensor 1. Stufe*  $\mathbf{T}$  dadurch definieren, dass sich seine Koordinaten genauso transformieren wie die infinitesimale Verschiebung  $d\vec{x}$ .

**Definition 1 (Kontravarianter Tensor 1. Stufe)** Eine einfach indizierte Größe  $\mathbf{T}$  heißt *kontravarianter Tensor 1. Stufe*, wenn sich ihre Koordinaten  $T^n$  im Koordinatensystem  $x$  beim Übergang auf ein anderes Koordinatensystem  $\bar{x}$  nach folgender Regel transformieren:

$$\boxed{\bar{T}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^n} T^n} \quad (2.12)$$

Kontravariante Koordinaten werden mit einem oberen Index notiert.

Es sei noch angemerkt, dass das Transformationsgesetz auch gelesen werden kann als *lineare Abbildung* des Spaltenvektors  $\mathbf{T}$  auf einen anderen Spaltenvektor  $\bar{\mathbf{T}}$  mittels der Abbildungsmatrix  $\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^n}$ , der *Jacobimatrix*  $\mathbf{J}$  der Koordinatentransformation 2.5.

## 2.5 Kontravariante Tensoren 2. Stufe

Wie bereits in Abschnitt 1.4 erwähnt, lassen sich Tensoren 2. Stufe nicht mehr so einfach visualisieren, da sie über zwei innere Richtungen verfügen. Ein einfacher mathematischer Weg, Tensoren 2. Stufe einzuführen besteht in der Definition einer neuen Rechenoperation zwischen zwei Tensoren 1. Stufe, dem *dyadischen Produkt*. Bei dieser Multiplikation werden ein Zeilenvektor  $\vec{A}$  und ein Spaltenvektor  $\vec{B}$  nach den Regeln der Matrixmultiplikation verknüpft. Das Ergebnis ist eine Matrix, und wie bereits bekannt, lassen sich Tensoren 2. Stufe als Matrix darstellen.

**Definition 2 (Dyadisches Produkt)** Verknüpft man die Koordinaten zweier Tensoren 1. Stufe nach der Regel

$$A^m B^n = T^{mn} \quad (2.13)$$

so heißt  $T^{mn}$  das *dyadische Produkt* von  $A^m$  und  $B^n$ .



Rasch ein kleines Beispiel: zwei Vektoren haben in einem gegebenen Koordinatensystem die Koordinaten  $\vec{A} = (2, 3, 4)$  und  $\vec{B} = (-2, 1, 5)$ . Das dyadische Produkt  $\mathbf{T}$  lautet:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -6 & 3 & 15 \\ -8 & 4 & 20 \end{pmatrix}$$

□

Wir stellen uns jetzt die Frage, wie sich dieses Objekt bei einem Wechsel des Koordinatensystems verhält. Da wir wissen, dass  $A$  und  $B$  Tensoren 1. Stufe sind, ist bekannt, wie sich diese beiden Größen transformieren (Definition 1). Es gilt  $\bar{A}^m \bar{B}^n = \bar{T}^{mn}$  im  $\bar{x}$ -Koordinatensystem und  $A^m B^n = T^{mn}$  im  $x$ -Koordinatensystem.

$$\bar{T}^{mn} = \bar{A}^m \bar{B}^n = \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^r} A^r \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s} B^s = \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^r} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s} A^r B^s = \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^r} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s} T^{rs} \quad (2.14)$$

Wir kommen zu folgender

**Definition 3 (Kontravarianter Tensor 2. Stufe)** Eine doppelt indizierte Größe  $\mathbf{T}$  heißt kontravarianter Tensor 2. Stufe, wenn sich ihre Koordinaten  $T^{mn}$  im Koordinatensystem  $x$  beim Übergang auf ein anderes Koordinatensystem  $\bar{x}$  nach folgender Regel transformieren:

$$\boxed{\bar{T}^{ij} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n} T^{mn}} \quad (2.15)$$

□

Das dyadische Produkt liefert also einen Tensor 2. Stufe.

Jeder Index eines kontravarianten Tensors 2. Stufe transformiert sich wie der Index eines kontravarianten Tensors 1. Stufe. Diese Definition läßt sich leicht auf mehr als einen Index erweitern, um Tensoren n. Stufe zu definieren.

## 2.6 Kovariante Tensoren 1. Stufe

Wir betrachten die partiellen Ableitungen eines skalaren Felds  $\varphi(x)$  nach den Koordinaten  $x^1, x^2, \dots, x^d$ . Jede dieser Ableitungen ist die Koordinate eines neuen Vektors, des *Gradienten* von  $\varphi(x)$ .

Für  $d = 3$  gilt:

$$\nabla \varphi(x) = \begin{pmatrix} \partial \varphi(x) / \partial x^1 \\ \partial \varphi(x) / \partial x^2 \\ \partial \varphi(x) / \partial x^3 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Die Koordinaten dieses Vektors sind im  $x$ -Koordinatensystem durch partielle Ableitungen nach  $x^i$  gegeben. Im  $\bar{x}$ -Koordinatensystem sind die Koordinaten des Gradienten durch partielle Ableitungen nach  $\bar{x}^i$  gegeben. Wir können nun wieder fragen: wie transformiert sich dieser Vektor beim Übergang von einem  $x$ -Koordinatensystem zu einem  $\bar{x}$ -Koordinatensystem? Gleichung 2.7 beschreibt bereits die Transformation:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}^n} = \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial \varphi}{\partial x^m} \quad (2.17)$$

Anstelle des Gradienten  $\nabla \varphi(x)$  können wir verallgemeinern und einen *kovarianten* Vektor definieren, dessen Koordinaten sich transformieren wie die Koordinaten eines Gradienten.

**Definition 4 (Kovarianter Tensor 1. Stufe)** Eine einfach indizierte Größe  $\mathbf{T}$  heißt *kovarianter Tensor 1. Stufe*, wenn sich ihre Koordinaten  $T_n$  im Koordinatensystem  $x$  beim Übergang auf ein anderes Koordinatensystem  $\bar{x}$  nach folgender Regel transformieren:

$$\boxed{\bar{T}_i = \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^i} T_n} \quad (2.18)$$

Kovariante Koordinaten werden mit einem unteren Index notiert. Man beachte, dass in dieser Definition nach der Summationskonvention über  $n$  summiert wird, da dieser Index bei  $\partial x^n$  als oberer und in  $T_n$  als unterer Index erscheint. Der Index  $i$  ist dagegen ein freier Index und erscheint auf beiden Seiten der Gleichung als unterer Index.

Es sei noch angemerkt, dass das Transformationsgesetz auch gelesen werden kann als *lineare Abbildung* des Spaltenvektors  $\mathbf{T}$  auf einen anderen Spaltenvektor  $\bar{\mathbf{T}}$  mittels der Abbildungsmatrix  $\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^i}$ , der *Jacobimatrix*  $\mathbf{J}$  der Koordinatentransformation 2.6. Diese Matrix ist die *Inverse*  $\mathbf{J}^{-1}$  der Jacobimatrix der Umkehrtransformation 2.5. Ein weiterer Unterschied zwischen ko- und kontravariantem Transformationsverhalten ist die Stellung des Summationsindex: bei kontravariantem Verhalten wird über den unteren Index der Abbildungsmatrix summiert, bei kovariantem Verhalten wird dagegen über den oberen Index summiert. Die Abbildungsmatrix für das kovariante Verhalten ergibt sich folglich aus der Abbildungsmatrix für kontravariantes Verhalten durch invertieren und transponieren.

Bei Koordinatentransformationen zwischen kartesischen Koordinatensystemen sind die Jacobimatrizen *orthogonal*, die Inverse ist gleich der Transponierten:  $\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^T$ . Die inverse Transponierte ist damit gleich der ursprünglichen Abbildungsmatrix. Daher tritt im Spezialfall von kartesischen Koordinatensystemen kein Unterschied zwischen kovarianten und kontravarianten Größen auf.

Die ko- und kontravarianten Koordinaten von Tensoren 1. Stufe (Vektoren) können in einem schiefwinkligen Koordinatensystem im 2-dim. Raum leicht visualisiert werden. Wie Abb. (2.2) zeigt, sind die kontravarianten Koordinaten  $(x^1, x^2)$  eines Ortsvektors  $\vec{P}$  Bestandteil der Entwicklung des Vektors nach den Basisvektoren:

$$\vec{P} = \vec{g}_1 x^1 + \vec{g}_2 x^2 \quad (2.19)$$

während die kovarianten Koordinaten  $(x_1, x_2)$  die senkrechten Projektionen von  $\vec{P}$  auf die Koordinatenachsen darstellen. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem fallen beide Koordinaten zusammen und sind nicht mehr unterscheidbar.

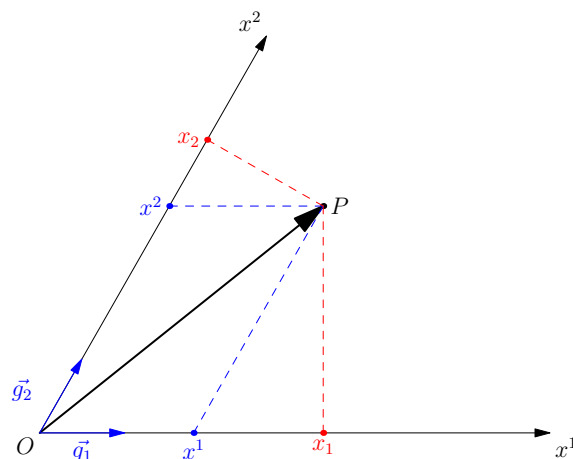


Abbildung 2.2: ko- und kontravariante Koordinaten

## 2.7 Kovariante Tensoren 2. Stufe

Wie bei den kontravarianten Tensoren lassen sich auch bei kovarianten Tensoren 1. Stufe durch das dyadische Produkt Tensoren höherer Stufe bilden. Das dyadische Produkt von zwei kovarianten Tensoren 1. Stufe  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  ist definiert durch

$$A_m B_n = T_{mn} \quad (2.20)$$

Wir gelangen so zu folgender

**Definition 5 (Kovarianter Tensor 2. Stufe)** Eine doppelt indizierte Größe  $\mathbf{T}$  heißt kovarianter Tensor 2. Stufe, wenn sich ihre Koordinaten  $T_{mn}$  im Koordinatensystem  $x$  beim Übergang auf ein anderes Koordinatensystem  $\bar{x}$  nach folgender Regel transformieren:

$$\bar{T}_{ij} = \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j} T_{mn} \quad (2.21)$$

□

Auch hier kann man die Definition leicht auf Tensoren mit höherer als 2. Stufe verallgemeinern.

## 2.8 Kovarianter metrischer Tensor

Wir beginnen mit der Betrachtung eines flachen Raumes, in dem ein kartesisches Koordinatensystem gegeben sei. Wir fragen nach der Länge einer infinitesimalen Verschiebung  $d\vec{x}$ . Die Länge dieses Vektors wollen wir  $ds$  nennen. Zur Berechnung von  $ds$  aus den Komponenten von  $d\vec{x}$ ,  $(dx^1, dx^2, \dots, dx^d)$  können wir den Satz des Pythagoras verwenden:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \quad (2.22)$$

Die Klammern um die Komponenten wurden notiert, um keine Verwechslungsgefahr zwischen Indices und Exponenten aufkommen zu lassen. Wir können diese Formel auch anders schreiben:

$$ds^2 = \sum_{m=1}^3 dx^m dx^m \quad (2.23)$$

wenn wir  $m$  als Summationsindex betrachten. Wir verletzen hier allerdings die Einstein'sche Summationskonvention, weil beide Indices obere Indices sind. Wir hatten vereinbart, nur dann zu summieren, wenn ein Index oben und der andere unten steht. Daher wurde das Summenzeichen explizit hinzugefügt.

Um die praktische Summationskonvention dennoch verwenden zu können, definieren wir das *Kronecker-Symbol*  $\delta_{mn}$ :

**Definition 6 (Kronecker-Symbol)**

$$\delta_{mn} = \delta_m^n = \begin{cases} 1 & : m = n \\ 0 & : m \neq n \end{cases} \quad (2.24)$$

Die Größen  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{22}$ ,  $\delta_{33}$  haben den Wert 1, alle anderen Indekskombinationen liefern den Wert 0.

Mit dieser Definition können wir Gleichung (2.23) umschreiben in

$$ds^2 = \delta_{mn} dx^m dx^n \quad (2.25)$$

Es wird über beide Indices  $m$  und  $n$  summiert. Das Kronecker-Symbol wählt aus allen möglichen Indekskombinationen nur die Möglichkeiten mit  $m = n$  aus, diese liefern die Quadrate von  $x^m$  für  $m = 1, 2, 3$ . Alle gemischten Glieder wie  $dx^1 dx^2$  werden mit Null multipliziert und fallen aus der Summe heraus.

Wir wollen nun die Länge des Vektors  $d\vec{x}$ , die hier im  $x$ -Koordinatensystem gegeben ist, durch die Komponenten desselben Vektors mit Koordinaten in einem anderen, beliebigen (auch gekrümmten) Koordinatensystem  $\bar{x}$  ausdrücken. Wir müssen also eine Koordinatentransformation für die  $dx^m$  Koordinaten ausführen. Wir verwenden die bekannte Formel (2.3) für das totale Differential und erhalten:

$$dx^m = \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^n} d\bar{x}^n \quad (2.26)$$

Wir können jetzt das Quadrat der Länge  $ds$  in  $\bar{x}$ -Koordinaten ausdrücken:

$$ds^2 = \delta_{mn} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^r} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^s} d\bar{x}^r d\bar{x}^s \quad (2.27)$$

Wir definieren nun den *metrischen Tensor*  $g_{rs}$

**Definition 7 (metrischer Tensor)**

$$g_{rs} = \delta_{mn} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^r} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^s} \quad (2.28)$$

Man beachte, dass  $m$  und  $n$  Summationsindices sind. Die Größe  $g_{rs}$  hat zwei freie untere Indices. Wir werden gleich beweisen, dass  $g_{rs}$  in der Tat die Transformationseigenschaften eines kovarianten Tensors 2. Stufe hat.

Mit Hilfe des metrischen Tensors können wir nun Gleichung (2.27) schreiben als:

$$\boxed{ds^2 = g_{rs}d\bar{x}^r d\bar{x}^s} \quad (2.29)$$

Man beachte, dass  $g_{rs}$  im Allgemeinen eine Funktion des Ortes ist:  $g_{rs} = g_{rs}(\bar{x})$ .

Vergleichen wir die beiden Ausdrücke (2.25) und (2.29). Beide haben die gleiche Form, nur in (2.29) steht anstelle des Kronecker-Symbols  $\delta_{mn}$  der metrische Tensor  $g_{rs}$ . Für (2.25) sind wir von kartesischen Koordinaten ausgegangen. Wir können das Kronecker-Symbol auch als *metrischen Tensor in kartesischen Koordinaten* bezeichnen. In beliebigen Koordinatensystemen hat der metrische Tensor nicht mehr die einfache Form des Kronecker-Symbols, sondern ist nach Definition 7 gegeben. Die Komponenten  $g_{11}$ ,  $g_{22}$  etc. sind im Allgemeinen nun nicht mehr gleich 1, die gemischten Komponenten  $g_{12}$  etc sind im Allgemeinen nun nicht mehr 0.

Wir wollen nun noch zeigen, dass sich die Größe  $g_{mn}$  transformiert wie ein kovarianter Tensor 2. Stufe. Wir haben zunächst ein kartesisches Koordinatensystem betrachtet und den Satz des Pythagoras angewandt. Das Kronecker-Symbol  $\delta_{mn}$  ist in diesem System der metrische Tensor. Durch eine Koordinatentransformation wurde  $\delta_{mn}$  durch den metrischen Tensor  $g_{rs}(\bar{x})$  ersetzt. Durch die Umkehrtransformation ist es möglich,  $g_{rs}$  wieder durch das Kronecker-Symbol zu ersetzen.

Wenn wir nicht mit einem kartesischen Koordinatensystem beginnen, sondern den allgemeinen Fall betrachten, in dem der Raum nicht flach sein muss und das Koordinatensystem gekrümmt sein kann, so müssen wir Gleichung (2.25) umschreiben in:

$$ds^2 = g_{mn}(x)dx^m dx^n \quad (2.30)$$

Analog dazu müssen wir nach Transformation der Koordinaten Gleichung (2.27) umschreiben in

$$ds^2 = g_{mn}(x) \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^r} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^s} d\bar{x}^r d\bar{x}^s \quad (2.31)$$

Damit gilt (vgl. Gleichung 2.29):

$$g_{rs}(\bar{x}) = g_{mn}(x) \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^r} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^s} \quad (2.32)$$

Dies ist aber genau das Transformationsgesetz für einen kovarianten Tensor 2. Stufe.

Wenn es möglich ist, eine Koordinatentransformation zu finden, welche  $g_{rs}(\bar{x})$  auf die Form des Kronecker-Symbols  $\delta_{mn}$  bringt, d.h. eine Transformation, welche die Krümmung beseitigt, und zwar überall im betrachteten Raumgebiet, nennt man den Raum *flach*. In diesem Fall haben wir zwar ein krummliniges Koordinatensystem, aber der zugrunde liegende Raum ist flach. Ist es nicht möglich, so eine Koordinatentransformation zu finden, nennt man den Raum gekrümmt. Die Krümmung kann global nicht durch eine Koordinatentransformation beseitigt werden.

Beispiel: Der metrische Tensor im flachen, euklidischen Raum, aber in einem krummlinigen Koordinatensystem (ebene Polarkoordinaten, Abbildung 2.3).

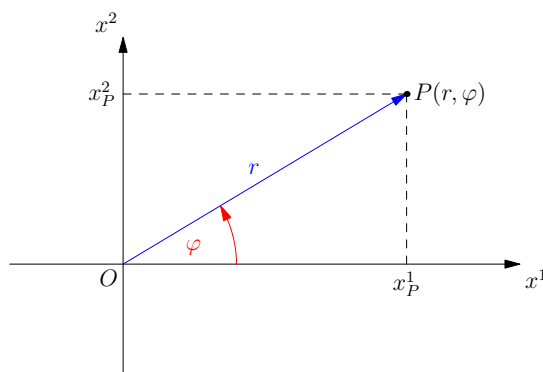


Abbildung 2.3: 2-dimensionale Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$

Es gilt folgende Koordinatentransformation:

$$x^1 = r \cos \varphi \quad (2.33)$$

$$x^2 = r \sin \varphi \quad (2.34)$$

Für  $ds$  gilt nach Pythagoras:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 \quad (2.35)$$

Um die totalen Differentiale  $dx^1$  und  $dx^2$  als Funktionen von  $r$  und  $\varphi$  auszudrücken, verwenden wir Gleichung 2.3:

$$dx^1 = \frac{\partial x^1(r, \varphi)}{\partial r} dr + \frac{\partial x^1(r, \varphi)}{\partial \varphi} d\varphi \quad (2.36)$$

$$= \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi \quad (2.37)$$

Analog gilt für  $dx^2$ :

$$dx^2 = \frac{\partial x^2(r, \varphi)}{\partial r} dr + \frac{\partial x^2(r, \varphi)}{\partial \varphi} d\varphi \quad (2.38)$$

$$= \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi \quad (2.39)$$

Mit  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$  folgt für die Metrik  $ds^2$  in Polarkoordinaten:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 \quad (2.40)$$

Die Komponenten des metrischen Tensor lauten:

$$g_{rr} = 1$$

$$g_{r\varphi} = 0$$

$$g_{\varphi r} = 0$$

$$g_{\varphi\varphi} = r^2$$

oder

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

Durch die Koordinatentransformation 2.33 läßt sich der metrische Tensor 2.41 wieder auf die Form des Kronecker-Symbols  $\delta_{mn}$  bringen. Der Raum ist daher euklidisch.

In Polarkoordinaten sind die Linien mit  $\varphi = \text{const.}$  Geraden und die Linien mit  $r = \text{const.}$  Kreise um den Ursprung. Die Koordinatenlinien stehen überall senkrecht aufeinander, die Ausserdiagonalelemente des metrischen Tensors  $g_{mn}$  sind daher Null (wie auch in kartesischen Koordinaten).

## 2.9 Gemischte Tensoren, Verjüngung

Mithilfe des dyadischen Produkts lassen sich auch Tensoren mit einem oberen und einem unteren Index definieren:

$$T_n^m = A^m B_n \quad (2.42)$$

Wir erhalten so einen *gemischten Tensor 2. Stufe*, einfach kovariant und einfach kontravariant. Sein Transformationsverhalten ist wie folgt:

$$\bar{T}_n^m = \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^n} T_s^r \quad (2.43)$$

Jeder ko- oder kontravariante Index transformiert sich wie ein ko- oder kontravarianter Tensor 1. Stufe.

Wir können beide Indices gleich setzen und gemäß der Summationskonvention darüber summieren:

$$T_m^m = T_1^1 + T_2^2 + T_3^3 + \dots \quad (2.44)$$

Wir erhalten einen *Skalar*, da der Index  $m$  ein gebundener Index ist und nach der Summation verschwindet. Ein Skalar ist unabhängig vom Koordinatensystem. Die Invarianz von  $T_m^m$  können wir aber auch beweisen. Nach Gleichung 2.43 gilt:

$$\bar{T}_m^m = \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^m} T_s^r \quad (2.45)$$

Es gilt aber:

$$\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^m} = \frac{\partial x^s}{\partial x^r} = \delta_r^s \quad (2.46)$$

und somit

$$\bar{T}_m^m = \delta_r^s T_s^r = T_r^r \quad (2.47)$$

womit die Invarianz unter einer Koordinatentransformation bewiesen ist.

Diese Rechenoperation nennt man *Verjüngung* nach dem Index  $m$ . Die Stufe des Tensors wird dabei um 2 erniedrigt. Bei einem Tensor 2. Stufe nennt man dies auch die *Spur* des Tensors.

## 2.10 Überschiebung

Allgemein kann man in einem tensoriellem Produkt zweier Tensoren je einen Index gleichsetzen und darüber summieren (*Überschiebung*). Man erhält einen Tensor  $(p+q-2)$ -ter Stufe. Betrachten wir als Beispiel das tensorielle Produkt eines kontravarianten Vektors  $A^m$  und eines kovarianten Vektors  $B_n$  und überschieben nach diesen beiden Indices

$$A^m B_m = A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 + \dots \quad (2.48)$$

so erhalten wir als Ergebnis das wohlbekannte *Skalarprodukt* der beiden Vektoren  $\vec{A}$  und  $\vec{B}$ .

## 2.11 Kontravarianter metrischer Tensor

Der metrische Tensor  $g_{mn}$  ist ein Tensor 2. Stufe und kann somit als Matrix dargestellt werden:

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

Außerdem gilt, dass  $\mathbf{g}$  *symmetrisch* ist, d.h. es gilt  $g_{mn} = g_{nm}$  und dass  $\mathbf{g}$  eine *Inverse* hat, d.h. eine Matrix  $\mathbf{g}^{-1}$ , so dass gilt:

$$\mathbf{g}^{-1} \mathbf{g} = \mathbf{E} \quad (2.50)$$

wobei  $\mathbf{E}$  die *Einheitsmatrix* ist:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

Die Elemente der Einheitsmatrix stellen das Kronecker-Symbol  $\delta_m^n$  dar.

Es gilt folgender Satz, der hier ohne Beweis angegeben wird: *die Inverse des metrischen Tensors  $g_{mn}$  ist ebenfalls ein Tensor 2. Stufe. Dieser Tensor transformiert sich wie ein kontravarianter Tensor.*

$$\mathbf{g}^{-1} = (g)^{mn} \quad (2.52)$$

Wir schreiben Gleichung (2.50) nun in Indexschreibweise und überschieben nach dem Index  $r$ :

$$g^{mr} g_{rn} = g_n^m = \delta_n^m \quad (2.53)$$

Dies liefert uns die bekannte Regel der Matrizenmultiplikation.

Kennen wir also  $g_{mn}$ , so können wir durch Bildung der inversen Matrix  $g^{mn}$  berechnen und umgekehrt.

Mithilfe des metrischen Tensors können wir nun kovariante Komponenten in kontravariante Komponenten umwandeln, indem wir mit dem metrischen Tensor multiplizieren:



Herunterziehen des Index:

$$T^m g_{mn} = T_n \quad (2.54)$$

Heraufziehen des Index:

$$T_m g^{mn} = T^n \quad (2.55)$$

Bisher haben wir die Differentiale der Ortskoordinaten  $dx^m$  mit oberen Indices notiert. Wir sind nun in der Lage, auch kovariante Koordinaten zu bilden:

$$dx_n = dx^m g_{mn} \quad (2.56)$$

Der Abstand  $ds$  lässt sich nun auch schreiben als

$$dx^n dx_n = dx^n dx^m g_{mn} = ds^2 \quad (2.57)$$

### 3 Tensoranalysis

In diesem Kapitel geht es darum, Tensoren zu *differenzieren*, d.h. wir möchten wissen, wie sich ein Tensor von Ort zu Ort verändert. Dazu ist zunächst festzustellen, dass eine Größe, deren Komponenten aus den Ableitungen der Komponenten eines Tensors gebildet werden, sich im Allgemeinen *nicht* wie ein Tensor transformiert. Kurz gesagt, ist die Ableitung eines Tensors kein Tensor mehr.

Um das einzusehen, betrachten wir ein einfaches Beispiel, ein konstantes Vektorfeld  $V^m$  im Raum (Abb. 3.1).

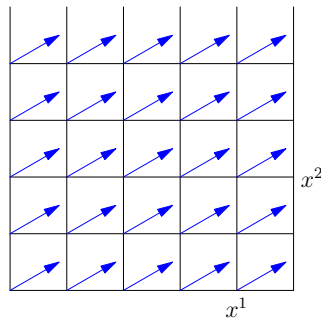


Abbildung 3.1: konstantes Vektorfeld

Die Komponenten des Vektorfeldes sind die Projektionen der Vektoren auf die Koordinatenachsen, diese sind konstant und es gilt  $\frac{\partial V^m}{\partial x^n} = 0$ .

Gehen wir zu einem krummlinigen Koordinatensystem über und betrachten dasselbe konstante Vektorfeld (Abb. 3.2). Wie man leicht sieht, sind die Projektionen der Vektoren auf die Koordinatenlinien nun ortsabhängig, denn die Achsen sind nun gekrümmt und diese Krümmung ist ortsabhängig. Selbst wenn das Vektorfeld also im Raum konstant ist, bedeutet das i.A. nicht, dass auch die Komponenten dieses Vektorfeldes konstant sind, da die Komponenten abhängig sind vom zugrundeliegenden Koordinatensystem. Bei Wechsel des Koordinatensystems gilt somit nicht mehr  $\frac{\partial \bar{V}^m}{\partial \bar{x}^n} = 0$ , die Ableitung des Vektorfeldes transformiert sich nicht wie ein Tensor. Denn für einen Tensor gilt: sind die Koordinaten in einem Koordinatensystem alle null, so sind sie es auch in jedem anderen Koordinatensystem.

Eine andere Form der Ableitung, die *kovariante* Ableitung, besitzt aber die Eigenschaft, dass die kovariante Ableitung eines Tensors wiederum ein Tensor ist. <sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Der Name *kovariante* Ableitung rührt daher, dass dabei die kovariante Stufe eines Tensors um eins erhöht wird.

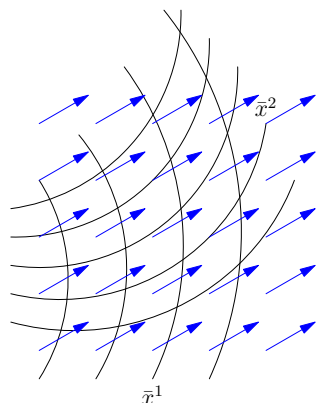


Abbildung 3.2: konstantes Vektorfeld in krummlinigen Koordinaten

### 3.1 Kovariante Ableitung

Wir untersuchen nun formal, ob sich die Ableitung eines Vektorfeldes wie ein Tensor verhält. Wir betrachten die Komponenten  $V_m$  eines Vektorfeldes in einem kartesischen Koordinatensystem  $x$ . Die Größe

$$T_{mn} = \frac{\partial V_m}{\partial x^n} \quad (3.1)$$

ist eine doppelt indizierte Größe, von der wir zunächst annehmen, es handle sich um einen Tensor. Gehen wir von einem kartesischen Koordinatensystem  $x$  zu einem beliebigen krummlinigen Koordinatensystem  $\bar{x}$  über, so müsste sich diese Größe transformieren wie ein kovarianter Tensor 2. Stufe:

$$\bar{T}_{mn} = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^n} T_{rs} = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial V_r}{\partial x^s} \stackrel{?}{=} \frac{\partial \bar{V}_m}{\partial \bar{x}^n} \quad (3.2)$$

Wegen der Kettenregel gilt:

$$\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial V_r}{\partial x^s} = \frac{\partial V_r}{\partial \bar{x}^n} \quad (3.3)$$

Mithilfe der Transformationseigenschaften kovarianter Tensoren 1. Stufe drücken wir die Komponenten  $\bar{V}_m$  in  $x$ -Koordinaten aus:

$$\frac{\partial \bar{V}_m}{\partial \bar{x}^n} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^n} \left( \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} V_r \right) \quad (3.4)$$

Wir fragen nun, ob folgende Gleichung gilt:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^n} \left( \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} V_r \right) \stackrel{?}{=} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial V_r}{\partial \bar{x}^n} \quad (3.5)$$

Wir wenden die Produktregel auf die linke Seite der Gleichung an:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^n} \left( \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} V_r \right) = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial V_r}{\partial \bar{x}^n} + \left( \frac{\partial}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} \right) V_r \quad (3.6)$$

Nun ist zu erkennen, dass Gleichung 3.5 nicht erfüllt ist. Der letzte Summand zerstört die Tensoreigenschaft der Ableitung. Dieser Term drückt die Tatsache aus, dass die krummlinigen Koordinaten ihre Richtung von Ort zu Ort ändern. Sind die  $x$ -Koordinaten lineare Funktionen der  $\bar{x}$ -Koordinaten, so gilt  $\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} = \text{const.}$ , und die Ableitung einer Konstanten ist null. Der Zusatzterm fällt in diesem Fall weg, d.h. in affinen Koordinatensystemen ist die Ableitung eines Tensors wieder ein Tensor. Im allgemeinen Fall eines beliebigen krummlinigen Koordinatensystems ist dies aber nicht der Fall.

Zur Abkürzung definieren wir:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} =: \Gamma_{nm}^r \quad (3.7)$$

Wollen wir erreichen, dass die Ableitung eines Tensors wiederum ein Tensor ist, genügt es also nicht, einfach die Ableitung zu bilden. Statt dessen benötigen wir einen Zusatzterm. Wir definieren nun die *kovariante* Ableitung  $\nabla_p$  eines kovarianten Tensors 1. Stufe wie folgt:

$$\boxed{\nabla_p V_m := \frac{\partial V_m}{\partial x^p} - \Gamma_{pm}^r V_r} \quad (3.8)$$

wobei die Größen  $\Gamma_{pm}^r$  *Christoffel-Symbole* genannt werden. Die Definition in Gleichung 3.7 ist nicht allgemein gültig, da wir im Beispiel vom  $x$ -Koordinatensystem als kartesisches Koordinatensystem ausgegangen sind. In der allgemeinen Form hängen die Christoffel-Symbole vom metrischen Tensor und seinen Ableitungen ab.

Die kovariante Ableitung eines Skalars ist einfach die gewöhnliche Ableitung (und damit ein Tensor). Bei einem Skalar gibt es keine Indices und daher auch keinen  $\Gamma$ -Zusatzterm.

Die kovariante Ableitung von Tensoren höherer Stufe enthält für jeden Index einen Zusatzterm. Die kovariante Ableitung eines kovarianten Tensors 2. Stufe wird wie folgt gebildet:

$$\boxed{\nabla_p T_{mn} = \frac{\partial T_{mn}}{\partial x^p} - \Gamma_{pm}^r T_{rn} - \Gamma_{pn}^r T_{mr}} \quad (3.9)$$

In gleicher Weise kann die kovariante Ableitung für Tensoren höherer Stufe berechnet werden.

Die  $\Gamma$ -Zusatzterme bewirken, dass die kovariante Ableitung eines Tensors selbst dann nicht null wird, wenn die gewöhnliche Ableitung des Tensors null ist, das Tensorfeld also (in einem krummlinigen Koordinatensystem) konstant ist und nicht vom Ort abhängt.

Als Beispiel betrachten wir ein Vektorfeld in Polarkoordinaten, dessen Komponenten  $V_r = 1$  (die Komponente in radialer Richtung) und  $V_\phi = 0$  (die Komponente in tangentialer Richtung) überall gleich sind (Abbildung 3.3). Dies gilt nicht in kartesischen

Koordinaten, sondern nur in Polarkoordinaten. Obwohl die Komponenten überall konstant sind, ist das Vektorfeld offensichtlich nicht konstant, und die Tatsache, dass die kovariante Ableitung dieses Vektorfeldes nicht verschwindet (im Gegensatz zur gewöhnlichen Ableitung), drückt diesen Sachverhalt aus. Die kovariante Ableitung berücksichtigt auch die Geometrie des Koordinatensystems.

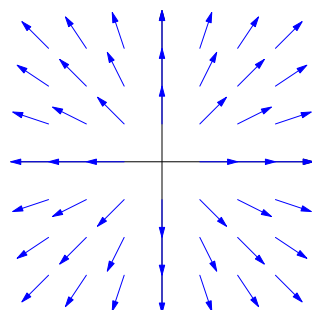


Abbildung 3.3: in Polarkoordinaten konstantes Vektorfeld

## 3.2 Christoffel-Symbole

In diesem Abschnitt wollen wir die Christoffel-Symbole  $\Gamma_{mn}^r$  bestimmen.

Wir betrachten zunächst den metrischen Tensor  $g_{mn}$  in einem kartesischen Koordinatensystem in einem flachen Raum. Der metrische Tensor ist  $\delta_{mn}$  und offensichtlich ortsunabhängig und konstant. Wir erwarten daher, dass die kovariante Ableitung des metrischen Tensors überall verschwindet. Da  $g_{mn}$  Tensoreigenschaften hat, verschwindet die kovariante Ableitung des metrischen Tensors auch in allen anderen Koordinatensystemen. Wir erwarten daher, dass gilt:

$$\nabla_p g_{mn} = 0 \quad (3.10)$$

Mit der Beziehung 3.9 erhalten wir:

$$\nabla_p g_{mn} = \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^p} - \Gamma_{pm}^r g_{rn} - \Gamma_{pn}^r g_{mr} = 0 \quad (3.11)$$

Dies kann als eine Bestimmungsgleichung für die Größen  $\Gamma_{mn}^r$  interpretiert werden. Es ist möglich, die Gleichung nach  $\Gamma_{mn}^r$  aufzulösen. Dazu werden die Indices permutiert, um weitere Gleichungen zu erhalten. Zunächst vertauschen wir die Indices  $p$  und  $m$  und berücksichtigen, dass  $\Gamma_{pm}^r = \Gamma_{mp}^r$  gilt:

$$\nabla_m g_{pn} = \frac{\partial g_{pn}}{\partial x^m} - \Gamma_{pm}^r g_{rn} - \Gamma_{mn}^r g_{pr} = 0 \quad (3.12)$$

Schließlich können wir noch, ausgehend von der letzten Beziehung,  $m$  und  $n$  vertauschen und erhalten:

$$\nabla_n g_{pm} = \frac{\partial g_{pm}}{\partial x^n} - \Gamma_{pn}^r g_{rm} - \Gamma_{mn}^r g_{pr} = 0 \quad (3.13)$$

Nun addieren wir 3.13 und 3.12 und subtrahieren 3.11. Wir erhalten:

$$\frac{\partial g_{pm}}{\partial x^n} + \frac{\partial g_{pn}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^p} = 2\Gamma_{mn}^r g_{pr} \quad (3.14)$$

Nun stört noch  $g_{pr}$  auf der rechten Seite. Durch Multiplikation mit der Inversen  $g^{pr}$  erhalten wir:

$$\Gamma_{mn}^r = \frac{1}{2} g^{pr} \left( \frac{\partial g_{pm}}{\partial x^n} + \frac{\partial g_{pn}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^p} \right) \quad (3.15)$$

Die Christoffel-Symbole transformieren sich *nicht* wie Tensoren. Dies ist leicht einzusehen: in kartesischen Koordinaten verschwinden alle partiellen Ableitungen des metrischen Tensors  $g_{mn}$ , daher gilt  $\Gamma_{bc}^a = 0$  in kartesischen Koordinaten. In krummlinigen Koordinaten sind die partiellen Ableitungen des metrischen Tensors aber nicht überall null, gleiches gilt auch für die Christoffel-Symbole. Das Transformationsverhalten entspricht also nicht dem eines Tensors.

Mithilfe der Christoffel-Symbole kann auch die kovariante Ableitung von kontravarianten Tensoren gebildet werden,

$$\nabla_m V^n = \frac{\partial V^n}{\partial x^m} + \Gamma_{mr}^n V^r \quad (3.16)$$

wie man mit Hilfe von  $\nabla_m V^n = \nabla_m (g^{nm} V_m)$  zeigen kann.

Im dreidimensionalen Raum gibt es 27 Komponenten von  $\Gamma_{bc}^a$ , im vierdimensionalen 64. Nicht alle Komponenten sind verschieden, so ist  $\Gamma_{bc}^a$  symmetrisch bezüglich der Indices  $b$  und  $c$ .

### 3.3 Geodäten

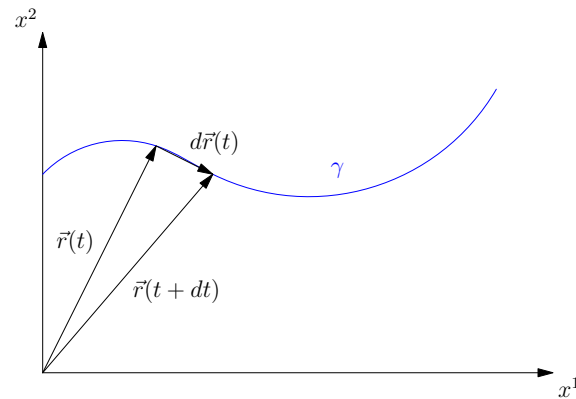
Wir fassen zunächst einige Ergebnisse aus der elementaren Analysis über *Kurven* zusammen.

Die Bahnkurve  $\gamma$  eines Punktes in der Ebene wird beschrieben durch den Ortsvektor  $\vec{r}(t)$  (siehe Bild 3.4). Die Kurve  $\gamma(t)$  wird mit dem Parameter  $t$  parametrisiert, bei Anwendungen in der Physik (Bahnkurve eines Teilchens) wählt man häufig die Zeit  $t$  für diesen Parameter. Der Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  ist dann tangential zur Bahn:

$$\vec{v} = \dot{\gamma}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left( \frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt} \right) \quad (3.17)$$

Das Integral über die Geschwindigkeit liefert die *Bogenlänge*  $s$  der Kurve:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau \quad (3.18)$$

Abbildung 3.4: Tangente  $d\vec{r}(t)$  entlang einer Kurve

Für die zeitliche Änderung der Bogenlänge  $s(t)$  gilt:

$$\frac{ds}{dt} = \dot{s}(t) = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau = \|\dot{\gamma}(t)\| \quad (3.19)$$

Man kann nun  $\gamma$  auch nach der Bogenlänge  $s(t)$  parametrisieren:  $\gamma = \gamma(t(s))$ . Die neue Geschwindigkeit  $\|\frac{d}{ds}\gamma(t(s))\|$  hat dann den Betrag 1 nach der Ketten- und Umkehrregel:

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{ds} = \dot{\gamma} \frac{dt}{ds} = \dot{\gamma} \frac{1}{\dot{\gamma}} = 1 \quad (3.20)$$

Voraussetzung ist natürlich, dass die Geschwindigkeit nirgends null wird (die Kurve heißt dann *regulär*).

Wir betrachten nun eine Kurve im flachen Raum in einem krummlinigen Koordinatensystem  $x$ . Die Kurve lässt sich mithilfe der Bogenlänge  $s$  der Kurve parametrisieren. Wir definieren einen willkürlichen Nullpunkt und betrachten nun ein skalares Feld  $\phi(x)$  in Abhängigkeit der Bogenlänge der Kurve. Wie ändert sich  $\phi(x)$  in Abhängigkeit der Bogenlänge  $s$ ? Es gilt:

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial\phi}{\partial x^m} \frac{dx^m}{ds} \quad (3.21)$$

Der Vektor  $\frac{dx^m}{ds}$  liegt tangential zur Kurve und hat die Länge 1. Diese Formel ist aus der elementaren Analysis bekannt als *Richtungsableitung* von  $\phi(x)$  in Richtung des Vektors  $\frac{dx^m}{ds}$ , welche sich als Skalarprodukt aus dem Gradienten von  $\phi(x)$  mit dem Richtungsvektor  $\frac{dx^m}{ds}$  (mit Betrag 1) ergibt. Fällt der Richtungsvektor mit einer Koordinatenachse zusammen, so ergibt sich für die Richtungsableitung einfach die gewöhnliche partielle Ableitung nach dieser Koordinate.

Gegeben sei nun ein ortsabhängiges Vektorfeld  $V^n$ . Wir interessieren uns für das Vektorfeld *entlang der Kurve*, d.h. für Ortskoordinaten, die auf der Kurve liegen. Wie ändert sich das Vektorfeld entlang der Kurve? Genau wie im Falle des Skalarfelds ergibt sich die Änderung entlang der Kurve aus der partiellen Ableitung, multipliziert mit dem Tangentenvektor, dem Richtungsvektor entlang der Kurve:

$$\frac{dV^n}{ds} = \frac{\partial V^n}{\partial x^m} \frac{dx^m}{ds} \quad (3.22)$$

$\frac{dV^n}{ds}$  ist aber kein Tensor, da  $\frac{\partial V^n}{\partial x^m}$  kein Tensor ist. Wir ersetzen daher  $\frac{\partial V^n}{\partial x^m}$  durch die kovariante Ableitung  $\nabla_m V^n$  und erhalten

$$\nabla_m V^n \frac{dx^m}{ds} = \nabla_s V^n \quad (3.23)$$

Dies ist die kovariante Ableitung *entlang einer Kurve*. Wir erhalten sie, indem wir die kovariante Ableitung mit dem Tangentenvektor multiplizieren. Schreiben wir das ausführlich:

$$\nabla_s V^n = \frac{\partial V^n}{\partial x^m} \frac{dx^m}{ds} + \Gamma_{mr}^n V^r \frac{dx^m}{ds} \quad (3.24)$$

Es gilt wegen der Kettenregel:

$$\frac{\partial V^n}{\partial x^m} \frac{dx^m}{ds} = \frac{dV^n}{ds} \quad (3.25)$$

und damit:

$$\nabla_s V^n = \frac{dV^n}{ds} + \Gamma_{mr}^n V^r \frac{dx^m}{ds} \quad (3.26)$$

Fassen wir zusammen: wollen wir ein Vektorfeld entlang einer Kurve differenzieren, so dass das Ergebnis sich wie ein Tensor transformiert, bilden wir die gewöhnliche Ableitung  $\frac{dV^n}{ds}$  und addieren, ähnlich wie bei der kovarianten Ableitung, einen  $\Gamma$ -Zusatzterm, multipliziert mit dem Tangentenvektor.

Wir fragen nun wie sich der Tangentenvektor entlang der Kurve ändert. Wenn die Kurve im anschaulichen Sinne eine Kurve ist, wird sich der Tangentenvektor von Ort zu Ort ändern. Wir setzen den Tangentenvektor  $\frac{dx^n}{ds}$  in 3.26 für  $V^n$  ein und berechnen die kovariante Ableitung des Tangentenvektors:

$$\nabla_s \frac{dx^n}{ds} = \frac{d^2 x^n}{ds^2} + \Gamma_{mr}^n \frac{dx^r}{ds} \frac{dx^m}{ds} \quad (3.27)$$

Die kovariante Ableitung des Tangentenvektors ist ein Tensor; verschwindet der Tensor in einem Koordinatensystem, verschwindet er in allen Koordinatensystemen.

Die kovariante Ableitung des Tangentenvektors einer Geraden ist null, da der Tangentenvektor überall auf der Linie gleich ist. Ist eine Kurve in einem beliebigen krummlinigen Koordinatensystem gegeben, so können wir einfach testen, ob diese Kurve eine gerade Linie ist, indem wir die kovariante Ableitung des Tangentenvektors berechnen. Verschwindet diese, ist die Kurve eine Gerade.

**Definition 8 (Geodäte)** *Verschwindet die kovariante Ableitung eines Tangentenvektors einer Kurve in einem gekrümmten Raum, nennt man die Kurve eine Geodäte.*

□

Im flachen Raum sind die Geodäten Geraden. Im gekrümmten Raum sind die Geodäten die "geradestmöglichen" Verbindungen zweier Punkte. Auf der Oberfläche einer Kugel sind die Großkreise Geodäten.



### 3.4 Paralleltransport und Krümmung im 2-dim. Raum

Um den Begriff der Krümmung des Raums mathematisch zu präzisieren, wird das Konzept des *Paralleltransports* eines Vektors verwendet. Unter dem Paralleltransport eines Vektors entlang einer Kurve versteht man die wiederholte Verschiebung eines Startvektors entlang einer Kurve um die Strecke  $ds$  derart, dass der verschobene Vektor immer parallel zu seinem Vorgänger bleibt (Abbildung 3.5). Der Vektor befindet sich dabei immer in der Tangentialebene der Fläche, andere Richtungen sind bei Betrachtung von intrinsischen Krümmungen von Flächen nicht zugelassen. Wir betrachten ausdrücklich nicht die extrinsischen Eigenschaften einer Fläche, die sich ergeben, wenn man sich die Fläche in eine dritte Dimension eingebettet vorstellt. Wir beschränken uns auf die zwei Dimensionen der Fläche.

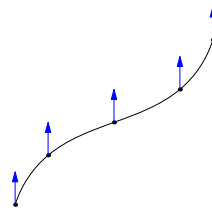


Abbildung 3.5: paralleler Transport eines Vektors entlang einer Kurve

In der Praxis kann man sich einen Kreisel (Gyroskop) vorstellen, dessen Drehachse bei Bewegung im Raum immer konstant bleibt und seine Richtung nicht ändert.

Wie müssen die Komponenten der Vektoren gewählt werden, um parallel verschoben zu werden? In kartesischen Koordinaten ist das trivial, die Komponenten des Vektors sind konstant zu wählen. In krummlinigen Koordinatensystemen oder einem gekrümmten Raum ist die Antwort nicht so einfach.

Wir gehen nochmals zurück zu der Definition der kovarianten Ableitung entlang einer Kurve (3.26). Falls für die Komponenten  $V^n$  des Vektors überall  $\nabla_s V^n = 0$  gilt, d.h. dass die kovariante Ableitung entlang der Kurve verschwindet, nennt man den Vektor entlang der Kurve parallel transportiert. Damit ist der Vektor entlang der Kurve (in krummlinigen Koordinaten oder im gekrümmten Raum) so gut wie möglich konstant, es ist die beste Näherung für "Konstanz". Wie sind die Komponenten zu wählen?

Es gilt:

$$\nabla_s V^n = \frac{dV^n}{ds} + \Gamma_{mr}^n V^r \frac{dx^m}{ds} = 0 \quad (3.28)$$

Durch Multiplikation mit  $ds$  und Auflösen nach  $dV^n$  erhält man:

$$dV^n = -\Gamma_{mr}^n V^r dx^m \quad (3.29)$$

Diese Gleichung kann interpretiert werden als eine Vorschrift, zu gegebenen  $V^r$  an einem Startpunkt die Komponenten  $dV^n$  bei Verschiebung um  $dx^m$  zu konstruieren. Nach jeder infinitesimalen Verschiebung wird der neu berechnete Vektor der neue Startvektor und die Berechnung wird erneut angewandt.

Wir betrachten nun den Paralleltransport eines Vektors entlang einer *geschlossenen* Kurve. Der Startpunkt ist gleich dem Endpunkt der Verschiebung. Stimmt die Richtung des parallel transportierten Vektors am Endpunkt immer mit der Ausgangsrichtung am Startpunkt überein? Im flachen Raum ist dies offensichtlich immer der Fall. Im allgemeinen Fall zeigt die Richtungsänderung des Vektors nach einem vollständigen Umlauf die *Krümmung des Raumes* in dem von der Kurve umschlossenen Gebiet an. Krümmung ist ein *lokales* Phänomen: die von der Kurve umschlossene Fläche kann klein gegenüber der Ausdehnung der Fläche sein, und dennoch wird man die Krümmung mithilfe des Paralleltransports feststellen können.

Ein einfaches Beispiel für einen gekrümmten Raum ist die Oberfläche eines Kegels (Abbildung 3.6).

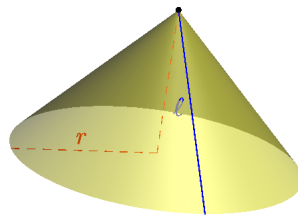


Abbildung 3.6: Kegel

Wird der Kegel entlang der Linie  $l$  aufgeschnitten, erhält man den Mantel des Kegels (Abbildung 3.7). Der Kegelmantel ist ein Kreis, aus dem ein Segment entfernt wurde. Die Fläche ist überall flach, aber die Spitze des Kegels ist eine Singularität, ein Ort mit unendlicher Krümmung. Der Paralleltransport auf einem Weg, der die Kegelspitze umschließt zeigt durch die unterschiedliche Stellung von Start- und Endvektor die Krümmung an (Der rote und der blaue Vektor  $\vec{p}$  sind identisch, da sie nach dem Schließen des Kegelmantels zusammenfallen).

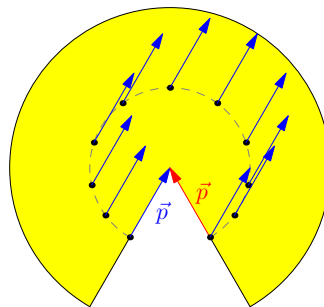


Abbildung 3.7: Paralleltransport auf Kegelmantel

Es gibt Flächen mit positiver und negativer Krümmung. Die Oberfläche des Kegels besitzt eine positive Krümmung: wird ein Vektor auf einer geschlossenen Kurve *im Uhrzeigersinn* parallel transportiert, so ist der Endvektor ebenfalls *im Uhrzeigersinn* gegen-

über dem Ausgangsvektor gedreht. Auf einer Fläche mit negativer Krümmung wird ein im Uhrzeigersinn parallel transportierter Vektor *entgegen* dem Uhrzeigersinn gegenüber dem Ausgangsvektor gedreht. Ein Beispiel für eine Fläche mit negativer Krümmung ist die Oberfläche eines Sattels (Abbildung 3.8). Die Mantelfläche eines Sattels erhält man, wenn man einem Kreis ein Segment hinzufügt (beim Kegel wurde ein Segment aus dem Kreis entfernt).



Abbildung 3.8: Sattelfläche

Bisher haben wir Krümmungen im 2-dimensionalen Raum betrachtet. Krümmungen der 4-dimensionalen Raumzeit lassen sich in vollkommen analoger Weise beschreiben, auch wenn wir uns keine anschauliche Vorstellung davon machen können.

Die Grundidee der Allgemeinen Relativitätstheorie besteht darin, dass die Raumzeit gekrümmt ist, und zwar aufgrund der Anwesenheit von Masse (oder allgemein der Anwesenheit von Energie und Impuls). Energie und Impuls erzeugen eine Krümmung der Raumzeit. Analog dazu kann man sagen, dass Masse ein Gravitationsfeld erzeugt, das nicht wegtransformiert werden kann (z.B. durch Wahl eines beschleunigten Bezugssystems). Auch die Krümmung der Raumzeit kann nicht durch eine Koordinatentransformation aufgehoben werden.

### 3.5 Der Krümmungstensor

Wird ein Vektor auf einer 2-dimensionalen Fläche parallel transportiert, so bleibt seine Länge konstant, aber seine Orientierung ändert sich. Der Vektor erfährt durch den Paralleltransport eine Rotation um einen Winkel  $d\theta$ , verglichen mit dem Ausgangsvektor. Man kann die Krümmung  $R$  mithilfe des Paralleltransports von Vektoren definieren als Verhältnis des Winkels  $d\theta$ , der von Start- und Zielvektor eingeschlossen wird zu dem von der Kurve des Paralleltransports umschlossenen Flächeninhalt  $dA$ :

$$R = \frac{d\theta}{dA} \quad (3.30)$$

Die Krümmung  $R$  ist ein Skalar und kann sowohl positive (ähnlich einer Kugeloberfläche) als auch negative Werte (ähnlich einem Sattel) annehmen.

In Räumen höherer Dimension ist die Situation komplizierter. Das Konzept der Parallelverschiebung eines Vektors kann unverändert angewendet werden, allerdings müssen dabei zwei Ebenen betrachtet werden. Eine zweidimensionale Ebene kann durch zwei (linear unabhängige) Vektoren definiert werden. Die geschlossene Kurve, längs der parallel

transportiert wird, definiert eine Ebene, und der Start- und Endvektor (nicht kollinear) definieren eine zweite Ebene. Beide Ebenen sind im Allgemeinen nicht gleich.

Im Spezialfall von drei Dimensionen kann eine Ebene auch durch *einen* Normalenvektor dargestellt werden. In drei Dimensionen können die beiden Ebenen und damit die Krümmung also durch zwei Vektoren beschrieben werden. Im allgemeinen Fall benötigt man aber vier Vektoren zur Beschreibung der Krümmung.

Zur Definition des Krümmungstensors in beliebig dimensionalen Räumen betrachten wir zwei Achsen  $x^\nu$  und  $x^\mu$  sowie einen geschlossenen, rechteckigen Pfad. Entlang dieses Pfades soll der Paralleltransport ausgeführt werden (Abbildung 3.9).

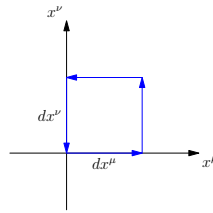


Abbildung 3.9: zur Definition des Krümmungstensors

Die vom Pfad umschlossene Fläche ist proportional zum Produkt  $dx^\nu dx^\mu$ <sup>2</sup>. Wir starten mit einem Vektor  $V^\sigma$ . Nach einem vollständigen Umlauf entlang des Pfades wird der Endvektor vom Startvektor um  $\delta V^\varrho$  abweichen. Diese Abweichung ist proportional zu  $dx^\nu dx^\mu$ . Die Abweichung wird ebenfalls proportional sein zum Startvektor  $V^\sigma$ . Ist der Startvektor der Nullvektor, wird sich auch keine Abweichung ergeben. Ist der Betrag des Startvektors groß, wird auch die Abweichung groß sein, da die Länge des Vektors beim Paralleltransport erhalten bleibt. Als Proportionalitätsfaktor definieren wir den Riemann'schen Krümmungstensor durch folgende Tensorgleichung:

$$\delta V^\varrho = dx^\mu dx^\nu V^\sigma R_{\sigma\mu\nu}^\varrho \quad (3.31)$$

Zwei Indices des Krümmungstensors beschreiben die Ebene des geschlossenen Pfades ( $\nu$  und  $\mu$ ), während die beiden anderen Indices ( $\varrho$  und  $\sigma$ ) die Änderung des Vektors  $V$  durch den Paralleltransport beschreiben. Der Krümmungstensor beinhaltet die partiellen Ableitungen der Christoffel-Symbole.

Neben der anschaulichen Vorstellung der Parallelverschiebung eines Vektors entlang eines geschlossenen Weges führt auch die Betrachtung des *Kommutators* der kovarianten Ableitung zur Definition des Krümmungstensors. Wir wollen auf diesem Weg den Krümmungstensor berechnen.

Wir definieren den *Kommutator* zweier Operatoren  $A$  und  $B$  als

$$[A, B] = AB - BA \quad (3.32)$$

<sup>2</sup>Die beiden Achsen müssen nicht senkrecht aufeinander stehen, und der metrische Tensor ist unbekannt, wichtig ist hier die Proportionalität.

Im Euklidischen Raum spielt die Reihenfolge der partiellen Ableitungen, angewandt auf eine Funktion  $f(x, y)$ , keine Rolle, die Ableitungen (interpretiert als Operator) sind vertauschbar, die Operatoren *kommutieren*:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right) \quad (3.33)$$

Setzen wir für  $A$  und  $B$  den Operator der partiellen Ableitung nach  $x$  bzw. nach  $y$  ein, so können wir für (3.33) auch schreiben:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right] f(x, y) = 0 \quad (3.34)$$

Wir stellen eine einfache Frage: gilt dies auch für die kovariante Ableitung, angewendet auf ein Vektorfeld  $V^i$ ? Wenn wir zunächst die kovariante Ableitung nach  $x^j$  berechnen, und vom Ergebnis dann die kovariante Ableitung nach  $x^k$  bestimmen, erhalten wir einen Tensor  $V_{jk}^i$ . Spielt die Reihenfolge der Ableitung nach  $x^j$  bzw.  $x^k$  eine Rolle? Erhalten wir das selbe Ergebnis, wenn wir zuerst nach  $x^k$  und dann nach  $x^j$  differenzieren? Wir suchen also den Wert von

$$[\nabla_k, \nabla_j] V^i = \nabla_k (\nabla_j V^i) - \nabla_j (\nabla_k V^i) \quad (3.35)$$

Wir berechnen zunächst den Minuend:

$$\nabla_k (\nabla_j V^i) = \nabla_k \left( \frac{\partial V^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jr}^i V^r \right) \quad (3.36)$$

Der Ausdruck in der Klammer ist ein (1,1)-Tensor  $V_{,j}^i$ , für dessen kovariante Ableitung nach  $x^k$  gilt:

$$\nabla_k V_{,j}^i = \partial_k V_{,j}^i + \Gamma_{sk}^i V_{,j}^s - \Gamma_{kj}^s V_{,s}^i \quad (3.37)$$

wobei wir eine abkürzende Schreibweise verwendet haben:

$$\partial_k := \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (3.38)$$

Setzt man für  $V_{,j}^i$  wieder die kovariante Ableitung ein, so erhält man:

$$\nabla_k (\nabla_j V^i) = \partial_k (\partial_j V^i + \Gamma_{rj}^i V^r) + \Gamma_{sk}^i (\partial_j V^s + \Gamma_{jr}^s V^r) - \Gamma_{kj}^s (\partial_s V^i + \Gamma_{sr}^i V^r) \quad (3.39)$$

Ausmultiplizieren und Anwenden der Produktregel liefert:

$$\begin{aligned} \nabla_k (\nabla_j V^i) &= \frac{\partial^2 V^i}{\partial x^k \partial x^j} + \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{rj}^i \right) V^r + \Gamma_{rj}^i \frac{\partial V^r}{\partial x^k} + \Gamma_{sk}^i \frac{\partial V^s}{\partial x^j} + \\ &+ \Gamma_{sk}^i \Gamma_{jr}^s V^r - \Gamma_{kj}^s \frac{\partial V^i}{\partial x^s} - \Gamma_{kj}^s \Gamma_{sr}^i V^r \end{aligned} \quad (3.40)$$

Wir können  $\nabla_j (\nabla_k V^i)$  nun einfach durch Vertauschen der Indices  $j$  und  $k$  gewinnen:

$$\begin{aligned} \nabla_j (\nabla_k V^i) &= \frac{\partial^2 V^i}{\partial x^j \partial x^k} + \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{rk}^i \right) V^r + \Gamma_{rk}^i \frac{\partial V^r}{\partial x^j} + \Gamma_{sj}^i \frac{\partial V^s}{\partial x^k} + \\ &+ \Gamma_{sj}^i \Gamma_{kr}^s V^r - \Gamma_{jk}^s \frac{\partial V^i}{\partial x^s} - \Gamma_{jk}^s \Gamma_{sr}^i V^r \end{aligned} \quad (3.41)$$

Nun wird 3.41 von 3.40 subtrahiert. Durch Umbenennung von Summationsindices und wegen der Symmetrie der Christoffelschen Symbole in den unteren Indices heben sich je fünf Terme auf und man erhält nach Ausklammern von  $V^r$ :

$$[\nabla_k, \nabla_j] V^i = (\partial_k \Gamma_{rj}^i - \partial_j \Gamma_{rk}^i + \Gamma_{sk}^i \Gamma_{jr}^s - \Gamma_{sj}^i \Gamma_{kr}^s) V^r = R_{rkj}^i V^r \quad (3.42)$$

Für den Riemannschen Krümmungstensor ergibt sich damit:

$$\boxed{R_{rkj}^i = \partial_k \Gamma_{rj}^i - \partial_j \Gamma_{rk}^i + \Gamma_{sk}^i \Gamma_{jr}^s - \Gamma_{sj}^i \Gamma_{kr}^s} \quad (3.43)$$

Die kovarianten Ableitungen kommutieren also nur, wenn der Krümmungstensor überall den Wert null hat. Dies ist nur im Euklidischen Raum der Fall. In einem gekrümmten Raum verschwindet der Krümmungstensor nicht überall.

Einen rein kovarianten Krümmungstensor (Riemannscher Krümmungstensor der 1. Art) erhält man durch herunterziehen des Index:

$$R_{ijkl} = g_{ir} R_{jkl}^r \quad (3.44)$$

Dieser Tensor ist hilfreich bei der Ermittlung der Symmetrien. Der Krümmungstensor ist schiefsymmetrisch bezüglich des ersten und zweiten Indexpaares:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} \quad (3.45)$$

$$R_{ijkl} = -R_{ijlk} \quad (3.46)$$

Ausserdem besteht Symmetrie bezüglich der Vertauschung des ersten und zweiten Indexpaares:

$$R_{ijkl} = R_{klij} \quad (3.47)$$

Aus (3.45) und (3.46) folgt:

$$R_{aakl} = R_{ijaa} = 0 \quad (3.48)$$

Man kann zeigen, dass es bei  $n$  Dimensionen nicht  $n^4$ , sondern nur  $\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$  unabhängige und potentiell von null verschiedene Komponenten des Krümmungstensors gibt.

Durch Einführung geodätischer Koordinaten (lokal ebenes System), in denen  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} = 0$  gilt, kann die *Bianchi-Identität* gezeigt werden:

$$\boxed{\nabla_m R_{ijkl} + \nabla_l R_{ijmk} + \nabla_k R_{ijlm} \equiv 0} \quad (3.49)$$

Da auf der linken Seite von (3.49) nur Tensoren stehen, ist die Beziehung auch in jedem anderen Koordinatensystem gültig, nicht nur in einem lokal ebenen System.

### 3.6 Ricci-Tensor und Einstein-Tensor

Für die Allgemeine Relativitätstheorie wichtig sind noch die beiden Formen des *Ricci-Tensors*:

$$\boxed{R_{jl} = R_{jkl}^k} \quad (3.50)$$

$$\boxed{R_j^i = g^{ik} R_{kj}} \quad (3.51)$$

Der Ricci-Tensor wird aus dem Riemann-Tensor durch Verjüngung bzgl. des ersten und dritten Index gewonnen. Andere Verjüngungen sind denkbar, führen jedoch auf Grund der Symmetrien des Riemann-Tensors entweder auf den Wert null oder auf  $\pm R_{ij}$ . Der Ricci-Tensor ist daher die einzig relevante Verjüngung des Riemann-Tensors. Der Ricci-Tensor ist symmetrisch in seinen beiden Indices. Im 3-dimensionalen Raum sind der Ricci-Tensor und der Riemann-Tensor äquivalent, da in drei Dimensionen eine Ebene (gegeben durch zwei Vektoren bzw. zwei Indices) auch durch nur einen Normalenvektor (bzw. durch nur einen Index) dargestellt werden kann.

Eine weitere Verjüngung liefert schließlich den *Ricci-Skalar*

$$\boxed{R = g^{ij} R_{ij} = R_i^i} \quad (3.52)$$

Aus (3.49) kann eine weitere Beziehung, die *kontrahierte Bianchi-Identität* hergeleitet werden:

$$\nabla_m R_{ij} - \nabla_l R_{jm} + \nabla_k R_{jlm}^k = 0 \quad (3.53)$$

Mit Hilfe von (3.53) kann gezeigt werden, dass der durch

$$G^{mn} := R^{mn} - \frac{1}{2} g^{mn} R \quad (3.54)$$

definierte *Einstein-Tensor* die folgende Beziehung erfüllt:

$$\boxed{\nabla_m G^{mn} = 0} \quad (3.55)$$

Wir werden später sehen, dass (3.55) die Kontinuitätsgleichung für Energie und Impuls in den allgemeinen Feldgleichungen garantiert.

## 4 Energie-Impuls-Tensor

Geometrie ist nur eine Seite der Relativitätstheorie, die andere Seite ist Materie (oder Masse). Die Krümmung des Raumes bestimmt, wie Materie sich bewegt, und die Materie bestimmt, wie der Raum sich krümmt (JOHN WHEELER). Masse und Energie sind äquivalent ( $E = mc^2$ ), dieses Kapitel beschäftigt sich daher mit dem Energie-Impuls-Tensor.

### 4.1 Strom als Vierervektor

Die *Ladungsdichte*  $\varrho$  einer elektrischen Ladung  $dq$ , verteilt auf das Volumenelement  $dV$ , ist definiert als

$$\varrho = \frac{dq}{dV} \quad (4.1)$$

Der *elektrische Strom*  $j$  ist definiert als die Ladungsmenge, welche pro Zeiteinheit  $dt$  durch einen Querschnitt mit der Fläche  $dA$  hindurchfließt. Da das Flächenelement  $dA$  im Raum orientiert ist (Normalenvektor senkrecht zu  $dA$ ) ist die Komponente des Stroms in Richtung  $x$ :

$$j^x = \frac{dq}{dA_x dt} \quad (4.2)$$

Dabei ist  $dA_x$  die Komponente des Normalenvektors auf  $dA$  in Richtung  $x$ .

Wenn wir  $c = 1$  setzen, hat die Zeit die Dimension einer Länge. Der Unterschied zwischen der Ladungsdichte und dem Strom besteht nun darin, dass die Ladungsdichte als Ladung pro Volumenelement im dreidimensionalen Raum, der Strom als Ladung pro Volumenelement in der Raum-Zeit. Beide Größen sind eng miteinander verwandt und können als *Vierervektor* des Stroms zusammengefasst werden:

$$j = (\varrho, j^x, j^y, j^z) \quad (4.3)$$

Die Ladungsdichte wird zur Zeitkomponente des Vierervektors.

Für die elektrische Ladung gilt ein Erhaltungssatz, der durch die Kontinuitätsgleichung ausgedrückt wird. Ladung kann aber nicht einfach an einem Ort verschwinden und an einem beliebigen anderen Ort instantan wieder auftauchen (was den Erhaltungssatz nicht verletzen würde). Die Änderung der Ladung in einem Volumenelement  $dV$  entspricht vielmehr dem Fluß der Ladung durch die Oberfläche dieses Volumenelements, der *Divergenz*.

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla j = 0 \quad (4.4)$$



Schreibt man den Nabla-Operator explizit aus, erhält man:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial j^x}{\partial x} + \frac{\partial j^y}{\partial y} + \frac{\partial j^z}{\partial z} = 0 \quad (4.5)$$

In der Darstellung als Vierervektor ist die Ladungsdichte die Zeitkomponente  $j^0$  des Stroms:

$$\frac{\partial j^0}{\partial x^0} + \frac{\partial j^1}{\partial x^1} + \frac{\partial j^2}{\partial x^2} + \frac{\partial j^3}{\partial x^3} = 0 \quad (4.6)$$

Die Kontinuitätsgleichung erhält also die schöne Form

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \quad (4.7)$$

## 4.2 Energie und Impuls

Auch für Energie und Impuls gelten Erhaltungssätze. Genaugenommen sind es vier Erhaltungssätze: einen für die Energie und drei für die drei Komponenten des Impulses (im dreidimensionalen Raum). Energie und Impuls sind aber keine Skalare: ein Objekt in Ruhe wird von einem relativ dazu bewegten Bezugssystem als bewegt wahrgenommen, es kommt also im bewegten Bezugssystem die kinetische Energie hinzu. Ebenso verhält es sich mit dem Impuls.

Die Energie und der Impuls bilden zusammen wieder einen Vierervektor  $(E, p_x, p_y, p_z)$ . Dabei ist die Energie die Zeitkomponente, der Impuls bildet die räumlichen Komponenten. Für jede Komponente dieses Vierervektors gilt je ein eigener Erhaltungssatz.

Ähnlich wie bei der elektrischen Ladung gibt es auch für die Energie den Begriff des Flusses, da Energie nicht einfach an einem Ort verschwindet und an einem beliebigen anderen Ort wieder auftaucht. Gleiches gilt für den Impuls. Änderungen der Energie/des Impulses implizieren also immer einen Fluss von Energie/Impuls durch die Wände des Systems. Wie bei der Ladung ist es also sinnvoll, die Begriffe *Energiedichte* und *Energiefluss* einzuführen, ebenso wie für den Impuls.

Bezeichnen wir mit  $T^0$  die Energie und mit  $T^1, T^2, T^3$  die Komponenten des Impulses. Für  $T^0$  gilt ein Erhaltungssatz und eine Kontinuitätsgleichung. Wir bezeichnen die Energiedichte mit  $T^{00}$  und den Energiefluss mit  $T^{01}, T^{02}$  und  $T^{03}$ , ähnlich wie wir die Ladung mit  $j^0$  und den Strom (Ladungsfluss) mit  $j^1, j^2$  und  $j^3$  bezeichnet haben. Den Impuls in x-Richtung bezeichnen wir mit  $T^1$ , die Dichte des Impulses analog mit  $T^{10}$ , den Fluss in x-Richtung des Impulses in x-Richtung mit  $T^{11}$  usw.

Die Größe  $T^{\mu\nu}$  bezeichnet man als *Energie-Impuls-Tensor*. Allerdings haben wir bisher nicht nachgewiesen, dass es sich wirklich um einen Tensor handelt.

Für die Energie kann man eine Kontinuitätsgleichung formulieren,

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial T^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial T^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial T^{03}}{\partial x^3} = 0 \quad (4.8)$$

ebenso wie für den Impuls in x-Richtung:

$$\frac{\partial T^{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial T^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial T^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial T^{13}}{\partial x^3} = 0 \quad (4.9)$$

Es gibt für die beiden anderen Richtungen im Raum noch zwei weitere Gleichungen dieser Art.

Man kann alle diese Gleichungen in einer einzigen zusammenfassen, die die lokale Erhaltung von Energie und Impuls beschreibt:

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad (4.10)$$

Diese Gleichung ist allerdings nicht in allen Koordinatensystemen gültig, da nur die partielle Ableitung von  $T^{\mu\nu}$  verwendet wird. Soll die Energie-Impuls-Erhaltung in jedem Koordinatensystem erfüllt sein, muss die kovariante Ableitung verwendet werden, um eine Tensorgleichung zu erhalten:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad (4.11)$$

Ohne Beweis sei hier angemerkt, dass  $T^{\mu\nu}$  *symmetrisch* ist, d.h. es gilt

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu} \quad (4.12)$$

So ist z.B. der Fluss der Energie in Richtung  $x^m$ ,  $T^{0m}$ , gleich der Dichte  $T^{m0}$  der Komponente  $m$  des Impulses.

# 5 Gravitation

## 5.1 Newtonsche Gravitation

Bevor wir zur Erklärung der Gravitation im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie kommen, wiederholen wir kurz die Grundzüge der klassischen Theorie der Gravitation nach ISAAC NEWTON.

Newtons erstes Gesetz ist das *Trägheitsgesetz*, welches besagt, dass sich ein Körper, auf den keine Kräfte wirken, geradlinig und gleichförmig bewegt. Ein Bezugssystem, in dem das Trägheitsgesetz gilt, heißt *Inertialsystem* (lat. inertia: Trägheit). Grund für die Trägheit eines Körpers ist seine Masse, genauer seine *träge Masse*.

Newtons zweites Gesetz besagt: um die Geschwindigkeit eines Körpers zu verändern (ihn zu beschleunigen) wird eine Kraft  $\vec{F}$  benötigt, die proportional zu der Beschleunigung  $\vec{a}$  und zu seiner trägen Masse  $m$  ist:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (5.1)$$

In Komponentenschreibweise ergibt sich:

$$F^i = m \frac{d^2 x^i}{dt^2} \quad (5.2)$$

Schon GALILEO GALILEI wusste, dass die Gravitationskraft auf einen Körper (bei homogenen Gravitationsfeld) proportional ist zu seiner *schweren Masse*  $m$  und der *Schwerebeschleunigung*  $g$ :

$$F_G = mg \quad (5.3)$$

Kombiniert man diese Gesetze so erhält man:

$$mg = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (5.4)$$

oder, da träge und schwere Masse äquivalent (*Äquivalenzprinzip*) sind:

$$g = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (5.5)$$

Die Beschleunigung, die auf einen Körper in einem Gravitationsfeld ausgeübt wird, ist also unabhängig von seiner Masse. Beim freien Fall in einem Gravitationsfeld fallen alle Körper gleich schnell. Oder anders ausgedrückt: man kann nicht unterscheiden zwischen der kräftefreien Trägheitsbewegung im leeren Raum und dem freien Fall in einem homogenen Gravitationsfeld.

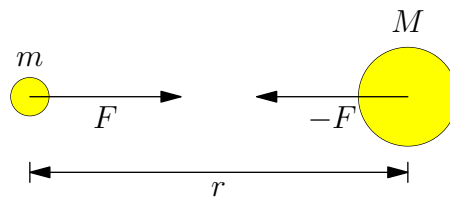


Abbildung 5.1: zum Newtonschen Gravitationsgesetz

Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz ziehen sich zwei Körper der Massen  $m$  und  $M$  im Abstand  $r$  mit einer Kraft  $F$  an, die proportional zum Produkt der beiden Massen und umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands ist (Abb. 5.1):

$$F = G \frac{mM}{r^2} \quad (5.6)$$

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$  ist die *Newtonsche Gravitationskonstante*. Verglichen mit den anderen Grundkräften ist die Gravitation eine sehr schwache Kraft: zwei Körper mit den Massen 1 kg im Abstand von 1 m ziehen sich mit einer Kraft von  $6,67 \cdot 10^{-11}$  N an.

Aufgrund der  $\frac{1}{r^2}$ -Abhängigkeit der Gravitationskraft erfahren räumlich ausgedehnte Körper unterschiedlich starke Anziehungskräfte an den dem Gravitationszentrum zu- und abgewandten Seiten. Wegen der radialsymmetrischen Struktur des Gravitationsfeldes erfahren ausgedehnte Körper zusätzlich unterschiedlich gerichtete Anziehungskräfte in Richtung auf das Gravitationszentrum. Diese Orstabhängigkeit der Anziehungskräfte resultiert in *Gezeitenkräften*. So können Monde, die ihren Planeten zu nahe kommen, durch Gezeitenkräfte zerstört werden.

## 5.2 Newtonsche Feldgleichung

Wir wollen die Beziehung (5.6) in einer dazu äquivalenten mathematischen Form, einer *Feldgleichung*, ausdrücken. Die Feldgleichung beschreibt den Zusammenhang zwischen zwei Feldern, in diesem Fall zwischen dem *Gravitationsfeld*  $\vec{g}(\vec{r})$  und dem Feld der Massendichte  $\rho(\vec{r}) = \frac{M}{V}$ .

In der Umgebung einer gegebenen Massenverteilung erfährt eine kleiner massebehafteter Testkörper eine Beschleunigung, die von seinem Ort und der Struktur der Massenverteilung abhängt. Dieses Beschleunigungsfeld ist unabhängig von der Größe des Testkörpers (Äquivalenzprinzip) und kann zur Definition des Gravitationsfeldes verwendet werden. Aus (5.3) und (5.6) folgt:

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{GM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (5.7)$$

Im Folgenden verwenden wir nicht mehr das Gravitationsfeld  $\vec{g}$ , sondern das skalare *Gravitationspotential*  $\phi(r)$ , aus dem sich das Gravitationsfeld durch Bildung des Gradienten berechnen lässt:

$$\vec{g} = -\nabla\phi(r) \quad (5.8)$$

Das Gravitationspotential hat die Form

$$\phi(r) = -\frac{GM}{r} \quad (5.9)$$

Zur Formulierung der Feldgleichungen benötigen wir noch den Begriff der *Divergenz* und den Integralsatz von Gauss.

Die Divergenz eines Vektorfeldes  $\vec{A}$  ist definiert als der Skalar

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (5.10)$$

Ein positiver Wert der Divergenz deutet auf eine *Quelle* des Vektorfeldes im betrachteten Raumgebiet, ein negativer Wert deutet dagegen auf eine *Senke*.

Der *Integralsatz von Gauß* erlaubt es, das Volumenintegral über die Divergenz eines Vektorfeldes mit dem Oberflächenintegral über die Oberfläche dieses Volumens zu verknüpfen:

$$\int \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV = \oint \vec{A} d\vec{n} \quad (5.11)$$

$d\vec{n}$  ist hier ein Flächenelement, beschrieben durch den nach außen weisenden Normalenvektor.

Anschaulich bedeutet dies, dass der Nettofluss z.B. einer Flüssigkeit, die durch eine geschlossene Oberfläche fließt, gleich ist der durch die im Inneren des umschlossenen Volumens erzeugten Menge. Der Satz von Gauss gilt für jedes Vektorfeld. Die Divergenz kann auch wie folgt geschrieben werden:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \vec{A} d\vec{n} \quad (5.12)$$

Zurück zum Gravitationspotential. Betrachten wir eine kugelsymmetrische Massenverteilung. Um das Gravitationspotential dieser Massenverteilung zu bestimmen, denken wir uns die Massenverteilung umgeben von einer konzentrischen Kugelschale mit Radius  $R$ . Für das Oberflächenintegral über diese Kugelschale gilt, da  $\vec{g}$  wegen der Kugelsymmetrie stets senkrecht auf der Kugelschale steht:

$$\oint \vec{g} d\vec{n} = 4\pi R^2 g = 4\pi GM \quad (5.13)$$

Mit (5.12) folgt:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \phi) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} 4\pi GM = 4\pi G\rho \quad (5.14)$$

Mit Hilfe des Laplace-Operators  $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2$  erhalten wir die bekannte *Poisson-Gleichung*:

$$\boxed{\Delta \phi = 4\pi G\rho} \quad (5.15)$$

Wir werden diese Gleichung später bei der heuristischen Begründung der Einsteinschen Feldgleichungen benötigen.

### 5.3 Bewegung im Gravitationsfeld

Nach dem Trägheitssatz bewegen sich Teilchen, auf die keine Kräfte wirken, geradlinig und gleichförmig. In der Raum-Zeit ist eine solche Bewegung eine Gerade. Die ART verallgemeinert diese Aussage auf die Bewegung von Teilchen in einem Gravitationsfeld: *Teilchen bewegen sich auf Geodäten in der Raum-Zeit*. Dies ist eine erstaunlich einfache Regel. Teilchen bewegen sich in einer gekrümmten Raum-Zeit so geradeaus wie möglich.

Eine Geodäte ist dadurch gekennzeichnet, dass die kovariante Ableitung des Tangentenvektors entlang der Kurve verschwindet. In Kapitel 3.3 hatten wir Kurven nach der Bogenlänge  $s$  parametrisiert. In der Raum-Zeit der Relativitätstheorie bietet es sich an, Bahnkurven von Teilchen nach der *Eigenzeit*  $\tau$  zu parametrisieren, die die Rolle des raum-zeitlichen Abstands spielt:

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (5.16)$$

Mit dieser Vereinbarung lautet die Bestimmungsgleichung einer Geodäte (vgl. Gleichung 3.27):

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\sigma\lambda}^\mu \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \quad (5.17)$$

Dies ist die Bewegungsgleichung eines Teilchens in einem Gravitationsfeld.

### 5.4 Newtonscher Grenzfall

Wir betrachten ein Bezugssystem, in dem zwei Näherungen erfüllt sein sollen: alle Teilchen sollen sich langsam im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit bewegen und das Gravitationsfeld soll schwach sein.

Die Bahnen langsamer Teilchen im Raum-Zeit Diagramm sind fast parallel zur Zeitachse. Wir können daher näherungsweise die Eigenzeit  $\tau$  durch die Koordinatenzeit  $t$  ersetzen. Es gilt also (für  $c = 1$ ):

$$x^0 = \tau = t \quad (5.18)$$

Damit gilt für die Ableitungen

$$\frac{dx^0}{d\tau} = 1 \quad (5.19)$$

und

$$\frac{d^2 x^0}{d\tau^2} = 0 \quad (5.20)$$

In Gleichung (5.17) bleiben also vom Term  $\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$  nur die Ableitungen der Raumkoordinaten (für  $\mu = 1, 2, 3$ ) übrig. Da sich alle Teilchen langsam bewegen sollen, ist die Ableitung der Ortskoordinaten  $\frac{dx^\mu}{d\tau}$  sehr klein (für  $\mu = 1, 2, 3$ ). Es verbleibt lediglich der Anteil  $\frac{dx^0}{d\tau} = 1$ .

Mit diesen Näherungen läßt sich Gleichung (5.17) für die Komponente  $x^1$  schreiben als

$$\frac{d^2 x^1}{dt^2} = -\Gamma_{00}^1 \quad (5.21)$$

Auf der linken Seite der Gleichung steht die  $x^1$ -Komponente der Beschleunigung, folglich drückt  $\Gamma_{00}^1$  die  $x^1$ -Komponente des Gravitationsfeld aus.

Mit der Definition der Christoffel-Symbole folgt:

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left( \frac{\partial g_{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right) \quad (5.22)$$

Die Annahme schwacher Gravitationsfelder ist in der Umgebung gewöhnlicher Sterne oder Planeten erfüllt (nicht aber in der Umgebung eines Schwarzen Lochs). Dies ist gleichbedeutend mit der Forderung, dass der metrische Tensor  $g_{\mu\nu}$  bis auf eine kleine Korrektur übereinstimmt mit dem metrischen Tensor  $\eta_{\mu\nu}$  der flachen Raum-Zeit der speziellen Relativitätstheorie. Gleiches gilt für die kontravarianten Größen  $g^{\mu\nu}$  und  $\eta^{\mu\nu}$ . Ausserdem sind zeitliche Änderungen des metrischen Tensors  $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0}$  klein.

Untersuchen wir  $\Gamma_{00}^1$  unter dieser Bedingung. Es gilt:

$$g^{11} = \eta^{11} = -1 \quad (5.23)$$

und

$$g^{01} = g^{10} = \eta^{01} = 0 \quad (5.24)$$

Damit folgt:

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\mu} \quad (5.25)$$

Die Beschleunigung in Richtung  $x^\mu$  ist proportional der Änderung der Zeit-Komponente des metrischen Tensors in Richtung  $x^\mu$ . Für die Verhältnisse auf der Erde, für die die beiden Einschränkungen eine sehr gute Näherung sind, bedeutet dies, dass die Gravitation vor allem der *Krümmung der Zeit* zuzuschreiben ist. Die Zeit vergeht in unterschiedlichen Höhen unterschiedlich schnell. Aufgrund des hohen Werts der Lichtgeschwindigkeit  $c$  macht sich bei der Zeit die Gezeitenkraft deutlich bemerkbar. Die Krümmung des Raums durch die Erde spielt dagegen praktisch keine Rolle.

In der Newton'schen Theorie ist das Gravitationsfeld (Beschleunigungsfeld) gegeben als Gradient des Gravitationspotentials  $\phi$ :

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} = -\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\mu} \quad (5.26)$$

Durch Integration folgt:

$$\phi = \frac{1}{2} g_{00} + \text{const.} \quad (5.27)$$

Das Gravitationspotential ist also mit der Zeit-Zeit Komponente des metrischen Tensors verknüpft.

## 5.5 Die allgemeinen Feldgleichungen

Aus der Newton'schen Theorie ist die *Poisson-Gleichung* bekannt:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (5.28)$$

Wird die Poisson-Gleichung verallgemeinert, steht auf der rechten Seite anstelle der Massendichte  $\rho$  als Quelle des Gravitationsfelds der Energie-Impuls-Tensor  $T^{\mu\nu}$ . Auf der linken Seite sollte also ebenfalls ein Tensor 2. Stufe stehen, der die Krümmung der Raumzeit beschreibt und der die 2. Ableitungen des metrischen Tensors beinhaltet. Der Riemann'sche Krümmungstensor scheidet aus, da er von 4. Stufe ist. Einsteins erster Ansatz war es daher, den Ricci-Tensor und eine Konstante  $\kappa$  zu verwenden:

$$R^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu} \quad (5.29)$$

Dieser Ansatz führte aber zu Widersprüchen mit der Erhaltung von Energie und Impuls. In Gleichung 4.11 hatten wir die Energie-Impuls-Erhaltung bereits formuliert:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (5.30)$$

Dieser Erhaltungssatz verlangt also, dass gilt:

$$\nabla_\mu R^{\mu\nu} = \kappa \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (5.31)$$

Es stellt sich allerdings heraus, dass die kovariante Ableitung des Ricci-Tensors nie verschwindet. Vielmehr gilt:

$$\nabla_\mu R^{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu R \quad (5.32)$$

Für den Krümmungsskalar  $R$  gilt aber, da es sich um eine skalare Größe handelt, die Gleichheit von kovarianter und partieller Ableitung. Wir können also in obiger Gleichung die partielle Ableitung von  $R$  durch die kovariante Ableitung ersetzen:

$$\nabla_\mu R^{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu R \quad (5.33)$$

Für kovariante Ableitungen gilt aber auch die allgemein bekannte Produktregel. Weiterhin gilt, dass die kovariante Ableitung des metrischen Tensors verschwindet. Wir können also auch schreiben:

$$\nabla_\mu R^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \nabla_\mu (g^{\mu\nu} R) \quad (5.34)$$

Dies war der große Durchbruch bei der Suche nach den allgemeinen Feldgleichungen, denn nun kann man schreiben:

$$\nabla_\mu \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = \nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0 \quad (5.35)$$

mit dem *Einstein-Tensor*  $G^{\mu\nu}$ :



$$G^{\mu\nu} := R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \quad (5.36)$$

(vgl. Gleichung 3.55).

Damit erhalten die allgemeinen Feldgleichungen die folgende Gestalt:

$$\boxed{R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \kappa T^{\mu\nu}} \quad (5.37)$$

in der die Energie- und Impulserhaltung automatisch erfüllt ist. Wegen der Symmetrien handelt es sich um 10 Differentialgleichungen für  $g^{\mu\nu}$  bei gegebenen  $T^{\mu\nu}$ .

Betrachten wir den Fall des Vakuums, d.h.  $T^{\mu\nu} = 0$ , ein Raum ohne Masse und ohne Energie. In diesem Fall lauten die *Vakuum-Feldgleichungen*

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 0 \quad (5.38)$$

Was kann man in diesem Fall über die Größen  $R^{\mu\nu}$  und  $R$  aussagen? Multiplizieren wir (5.38) mit  $g_{\mu\nu}$ , so erhalten wir:

$$g_{\mu\nu} \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \right) = \left( R - \frac{1}{2}4R \right) = -R = 0 \quad (5.39)$$

da

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \delta_{\mu}^{\mu} = 4 \quad (5.40)$$

gilt (vgl. mit Gleichung (2.53)). Setzen wir dieses Ergebnis wieder in (5.38) ein, so folgt:

$$R^{\mu\nu} = 0 \quad (5.41)$$

Ist der Ricci-Tensor überall null, so gilt in zwei- oder dreidimensionalen Räumen, dass der Raum flach ist. In der 4-dimensionalen Raumzeit gilt dies aber nicht, aus (5.41) kann daher nicht geschlossen werden, dass die Raumzeit flach ist. Ein mögliche Lösung der Vakuum-Feldgleichungen sind *Gravitationswellen*, sich in der Raumzeit ausbreitende Störungen, in der die Komponenten des metrischen Tensors sich wellenartig verändern. In vier Dimensionen kann der Ricci-Tensor also null sein, während der Riemann-Tensor ungleich null ist.

## 5.6 Die kosmologische Konstante

Es gibt noch einen weiteren Tensor, dessen kovariante Ableitung null ist, dies ist der metrische Tensor. Fügt man also noch ein vielfaches des metrischen Tensors in die allgemeine Feldgleichung ein, bleibt die Kontinuitätsgleichung für den Energie-Impuls Tensor weiterhin erhalten:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \Lambda g^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu} \quad (5.42)$$

$\Lambda$  ist die *kosmologische Konstante*. Welche Bedeutung hat die kosmologische Konstante in der Newtonschen Näherung (bei schwachen Gravitationsfeldern)?  $g^{\mu\nu}$  ist in dieser Näherung (Metrik der speziellen Relativitätstheorie) gleich 1. Die geänderte Feldgleichung geht aus der Poisson-Gleichung hervor und lautet:

$$\Delta\phi + \Lambda = 4\pi G\rho \quad (5.43)$$

Wie ändert sich das Gravitationspotential  $\phi$  durch Einführung der kosmologischen Konstante? Gehen wir von einem leeren Universum mit  $\rho = 0$  aus, so spielt  $\Lambda$  die Rolle einer negativen, homogenen Massendichte:

$$\Delta\phi = -\Lambda \quad (5.44)$$

Eine Lösung dieser Differenzialgleichung für  $\phi$  ist

$$\phi = -\frac{\Lambda}{6}(x^2 + y^2 + z^2) \quad (5.45)$$

Definitionsgemäß kann durch Bildung des Gradienten von  $\phi$  das Beschleunigungsfeld bestimmt werden. Die  $x$ -Komponente der Beschleunigung ergibt sich zu

$$g_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\Lambda}{6} 2x = \frac{1}{3} \Lambda x \quad (5.46)$$

Die  $x$ -Komponente der Beschleunigung ist folglich proportional  $\Lambda$  und zu  $x$ , der Entfernung vom Ursprung und sie ist nach außen gerichtet. Es resultiert also eine abstoßende Kraft in radialer Richtung, die mit wachsendem Abstand vom Ursprung zunimmt. Jedes Objekt im Universum scheint also vom Ursprung abgestoßen zu werden, und zwar umso stärker, je weiter entfernt vom Ursprung das Objekt ist. Allerdings gibt es im Universum keinen zentralen Ursprung, das Kraftgesetz ist unabhängig von der Wahl des Ursprungs, jedes Objekt entfernt sich mit zunehmender Beschleunigung von jedem anderen.

In der Beziehung (5.42) ist  $\Lambda$  Teil der Geometrie. Wir können die Gleichung aber auch umschreiben:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \kappa T^{\mu\nu} - \Lambda g^{\mu\nu} \quad (5.47)$$

Die kosmologische Konstante kann so auch interpretiert werden als Teil des Energie-Impuls-Tensors, der selbst im Vakuum ( $T^{\mu\nu} = 0$ ) vorhanden ist (*Vakuum-Energie*). Der Wert von  $\Lambda$  ist sehr klein, die abstoßende Kraft wird erst bei Entfernungen in der Größenordnung von Milliarden Lichtjahren nachweisbar.

Ursprünglich hatte Einstein die kosmologische Konstante eingeführt, um ein stabiles Universum zu beschreiben. Als Ausgleich zur gravitativen Anziehungskraft sollte es auch ein abstoßende Kraft geben, die das Universum vor einem Kollaps bewahrt. Zu diesem Zweck muss  $\Lambda$  einen genau definierten Wert haben, und es handelt sich um ein instabiles Gleichgewicht. Einstein bezeichnete die Einführung der kosmologischen Konstante nach der Entdeckung der Expansion des Universums als seine größte Eselei. Heute wissen wir, dass die kosmologische Konstante tatsächlich existiert, allerdings nicht, um ein statisches Universum zu beschreiben.

# Index

Basisvektor, 6  
Bianchi-Identität, 38  
Christoffel-Symbole, 27  
gekrümmter Raum, 10  
kartesisches Koordinatensystem, 5  
Komponente, 6  
kontravariant, 4, 10  
Koordinaten, 5  
Koordinatensystem, 5  
Koordinatentransformation, 9  
kovariant, 4, 10  
kovariante Ableitung, 27  
Kugelkoordinaten, 6  
Polarkoordinaten, 6  
Ricci-Skalar, 39  
Ricci-Tensor, 38  
Skalar, 4  
Spannungstensor, 8  
Tensor, 4  
Transformationsverhalten, 8  
Vektor, 4