Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1

Zeigen Sie:

$$R^i_{jkl} + R^i_{klj} + R^i_{ljk} \equiv 0$$

Aufgabe 2

Der *Riemann-Tensor 1. Art* ist definiert als

$$R_{ijkl} = g_{ir} R^r_{jkl}$$

a) Zeigen Sie unter Verwendung geodätischer Koordinaten (d.h. es gelte $\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c} \equiv 0$)

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2} \left(\partial_k \partial_j g_{il} + \partial_l \partial_i g_{jk} - \partial_k \partial_i g_{jl} - \partial_l \partial_j g_{ik} \right)$$

b) Beweisen Sie mit Hilfe des Ergebnisses von a), dass R_{ijkl} im ersten und zweiten Indexpaar schiefsymmetrisch ist:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl}$$

und

$$R_{ijkl} = -R_{ijlk}$$

c) Zeigen Sie mit Hilfe des Ergebnisses von a) die Symmetrie von R_{ijkl} bzgl. des Vertauschens des ersten und zweiten Indexpaares:

$$R_{ijkl} = R_{klij}$$

d) Warum gelten die Beziehungen in jedem Koordinatensystem, obwohl ihre Gültigkeit nur für geodätische Koordinaten bewiesen wurde?

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass in ebenen Polarkoordinaten (r, φ) gilt:

$$R_{ijkl} \equiv 0$$

(Hinweis: auf Grund der Symmetrien genügt es, zu zeigen, dass $R_{r\varphi r\varphi} \equiv 0$. Verwenden Sie dazu die Ergebnisse von Aufgabenblatt 3, Aufgabe 3).