Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1

Die Beschleunigung a^i eines Teilchens, das sich auf der Bahn $x^i = x^i(t)$ bewegt, ist gegeben als zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit $\frac{dx^i}{dt}$ entlang der Bahnkurve. Es gilt:

$$a^i = \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{dx^i}{dt}\right) = \frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{rs}\frac{dx^r}{dt}\frac{dx^s}{dt}$$

Zeigen Sie, dass für die Beschleunigung eines Teilchens auf einer Kreisbahn mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ in Polarkoordinaten ($x^1 = r\cos\omega t$ und $x^2 = r\sin\omega t$) gilt:

$$a^\varphi = 0$$

und

$$a^r = -r\omega^2$$

Hinweis: verwenden Sie für die Γ^a_{bc} die Ergebnisse von Aufgabe 3, Blatt 3.

Aufgabe 2

Zeigen Sie: für ein kovariantes Vektorfeld V_j gilt

$$\nabla_l(\nabla_k V_j) - \nabla_k(\nabla_l V_j) = R^i_{jkl}V_i$$

mit dem *Riemannschen Krümmungstensor*

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial\Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \Gamma^r_{jl}\,\Gamma^i_{rk} - \Gamma^r_{jk}\,\Gamma^i_{rl}$$