Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass mit der Definition der Christoffel-Symbole als

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}\, g^{ad} \left(\frac{\partial g_{dc}}{\partial x^b} + \frac{\partial g_{db}}{\partial x^c} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial x^d} \right)$$

die kovariante Ableitung des metrischen Tensors verschwindet:

$$\nabla_p\, g_{mn} = \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^p} - \Gamma^r_{pm}\, g_{rn} - \Gamma^r_{pn}\, g_{mr} = 0$$

Aufgabe 2

Seien T^p_r und S^q_s zwei Tensoren 2. Stufe. Zeigen Sie, dass für die kovariante Ableitung des dyadischen Produkts

$$U^{pq}_{rs} = T^p_r S^q_s$$

die Produktregel gilt:

$$\nabla_k U^{pq}_{rs} = (\nabla_k T^p_r)\, S^q_s + T^p_r\, (\nabla_k S^q_s)$$

Aufgabe 3

a) Berechnen Sie g_{ij} und g^{ij} in ebenen Polarkoordinaten

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

b) Zeigen Sie, dass für die Christoffel-Symbole Γ^a_{bc} in ebenen Polarkoordinaten gilt:

$$\Gamma^\varphi_{r\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r$$

Alle anderen Komponenten verschwinden.

c) Zeigen Sie:

$$\nabla_r\, g_{\varphi\varphi} = 0$$