Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1

Zeigen Sie:

a) Der metrische Tensor g_{ij} transformiert sich wie ein kovarianter Tensor 2. Stufe.

b) Das Kronecker-Symbol δ^i_j transformiert sich wie ein 1-fach kovarianter/1-fach kontravarianter Tensor.

Aufgabe 2

Seien S^i und T^j zwei kontravariante Tensoren 1. Stufe.

a) Zeigen Sie: die Summe $R^i = S^i + T^i$ ist ebenfalls ein kontravarianter Tensor 1. Stufe.

b) Zeigen Sie: das Produkt $P^{ij} = S^i\,T^j$ ist ein kontravarianter Tensor 2. Stufe.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass das Produkt $E = T^i\,S_i$ aus einem kontravarianten Tensor T^i und einem kovarianten Tensor S_i invariant ist unter einer Transformation des Koordinatensystems.

Aufgabe 4

Im 2-dim. Euklidischen Raum mit den kartesischen Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ sei eine kovariante Basis $\mathbf{g}_i$ gegeben durch $\mathbf{g}_1 = \mathbf{e}_1$ und $\mathbf{g}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ sowie ein Vektor $\mathbf{A} = A^i\mathbf{g}_i$ mit $A^1 = 2$ und $A^2 = 1$.

a) Zeichnen Sie die kovariante Basis und den Vektor $\mathbf{A}$ in ein kartesisches Koordinatensystem ein.

b) Berechnen Sie den kovarianten metrischen Tensor $g_{ij} = \mathbf{g}_i\,\mathbf{g}_j$

c) Berechnen Sie mit Hilfe der Beziehung

$$\mathbf{g}_i\,\mathbf{g}^j = \delta^j_i \tag{1}$$

die kontravariante Basis $\mathbf{g}^j$ und zeichnen Sie sie in das Koordinatensystem ein.

d) Berechnen Sie den kontravarianten metrischen Tensor $g^{ij} = \mathbf{g}^i\,\mathbf{g}^j$ und zeigen Sie, dass gilt:

$$g^{ij}\,g_{jk} = \delta^i_k \tag{2}$$

e) Berechnen Sie die kovarianten Komponenten A_i des Vektors $\mathbf{A} = A_i\,\mathbf{g}^i$.

f) Verifizieren Sie die Regeln für das Herauf- und Herunterziehen des Index:

$$A_m = g_{mn}\,A^n \tag{3}$$

$$A^m = g^{mn}\,A_n \tag{4}$$